И.П. Денисова

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

УНЦ ДО
Москва

http://abiturcenter.ru

abiturcenter.ru Учебно-научный центр дополнительного образования

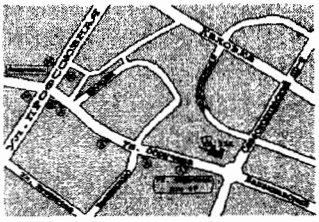
Справочник Абитуриента | Книжная Лавка Абитуриента | Подготовительные курсы | Вечерняя гимназия | On-line тесты | Издательство УНЦ ДО | Мини-типография | Каталог ссылок

УНЦ ДО

- Новости
- О нас
- Справочник Аб
- Книжная Лавка Абитуриента
- Подготовитель курсы
- Вечерняя гимн
- On-line тесты
- Издательство У
- Мини-типограф
- Как нас найти
- Каталог ссыло
- Форум
- Архив новосте

Для получения нов нашего портала вве Ваш e-mail:

- Подготовка к поступлению в ведущие ВУЗы и к сдаче ЕГЭ на базе Программы вступительных экзаменов в МГУ им. М.В. Ломоносова
- Дополнительное образование школьников
- Разработка новых методов обучения в дополнительном довузовском образовании
- Издание учебной, учебно-методической, научно-популярной и тестовой литературы для старшеклассников и абитуриентов
- Распространение литературы для абитуриентов (опт, розница, наложенный платеж)
- Малотиражная (50 - 1000 экз) печать учебной, методической и научной литературы
- Оперативная полиграфия до формата А3



Директор *Игорь Владимирович Крюченков*, доцент, кандидат физико-математических наук
ivk@abiturcenter.ru

117246, Москва, ул.Обручева, 55А
Т/ф (095) 718-77-67, 718-69-66, 718-77-85
info@abiturcenter.ru

Проезд: ст.м.Калужская, авт.№№ 1,41 (до конца), 163, 224, 246, 699 до ост. "ул.Обручева, д.47" (3 остановки)

УДК 514.743(075.8)
ББК 22.151.5я73
Д33

Рецензенты:

кафедра высшей математики Московского энергетического института (технического университета),

профессор кафедры математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова А.Г. Ягола

Д33 Денисова И.П.
Введение в тензорное исчисление и его приложения. Учебное пособие. - 2-е изд., стер.- М.: Издательство УНЦ ДО, 2004. - 230 с.

ISBN 5-88800-255-0

Настоящее пособие содержит материал по тензорному исчислению, входящий в учебные программы для студентов специальностей «Прикладная математика» и «Прикладная механика». В пособии излагается тензорная алгебра, включая нелинейные соотношения для тензоров второго ранга, и тензорный анализ в произвольных римановых и псевдоримановых пространствах. Для изложения основных тензорных уравнений и соотношений механики сплошных сред, электродинамики, специальной и общей теории относительности применяется развитый математический аппарат.

ISBN 5-88800-255-0

И.П. Денисова

Введение в тензорное исчисление и его приложения

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических специальностей

2-е издание, стереотипное

УНЦДО
Москва
2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание этого учебного пособия имело небольшой тираж, который неожиданно быстро разошелся. В связи с этим возникла необходимость во втором издании, при подготовке которого были сделаны лишь небольшие дополнения.

Москва, 9 февраля 2004 г. И.П.Денисова

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предметом исследования физики, механики и прикладной математики, как известно [1], являются математические модели различных природных процессов и областей человеческой деятельности. Среди них большую роль играют математические модели естествознания. Для описания этих моделей используются различные упорядоченные системы функций. Наиболее широкое применение среди них получили так называемые тензорные функции или просто тензоры. С тензорами мы встречаемся [2] – [6] в механике сплошных сред, механике абсолютно твердых тел, гидродинамике, нелинейной акустике, электродинамике, теории гравитации, специальной теории относительности и многих других разделах естествознания. Опыт многолетнего чтения лекций на кафедре "Прикладная математика" МАТИ-РГТУ им.

К.Э.Циолковского показал, что знание основ тензорной алгебры и анализа особенно необходимо студентам для успешного освоения курсов естественно-научного блока дисциплин для специальностей прикладная математика, прикладная механика и ряда других.

К настоящему времени имеется достаточно много различных учебных пособий и монографий [7] – [11], которые затрагивают те или иные аспекты тензорной алгебры и анализа, а также римановой геометрии. Однако краткого и вместе с тем достаточно полного изложения, позволяющего начать изучение этих вопросов практически с нуля, среди них нет.

Кроме того, в самое последнее время появился ряд научных работ [12] – [15], в которых доказаны различные алгебраические соотношения, которым удовлетворяет тензор второго ранга в произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$. Эти соотношения еще не успели войти в учебную и монографическую литературу, хотя они очень полезны при проведении различных расчетов в *прикладной математике*, *механике* и физике.

Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие призвано в определенной мере восполнить этот пробел. Оно состоит из восьми глав.

В первых двух главах излагаются основы тензорной алгебры, анализа и римановой геометрии в случае N-мерных пространств. Так как этот материал является устоявшимся в научной литературе, то основная часть утверждений делается либо совсем без доказательств, либо приводятся лишь краткие указания, которые могут быть положены в основу доказательств.

В последующих главах, содержащих обобщение не-

давно полученных оригинальных результатов, все основные утверждения сформулированы в виде теорем и сопровождаются подробными доказательствами.

В частности, в главе 3 вводятся понятия степени тензора второго ранга, его инварианта, обратного тензора и на их основе доказывается ряд нелинейных алгебраических соотношений, которым удовлетворяет тензор второго ранга в произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$. В главе 4 приведено доказательство ряда новых тензорных соотношений для пространств с небольшим числом измерений: $N = 2,3,4$.

Глава 5 посвящена изложению основных положений и тензорных уравнений механики сплошных сред и теории упругости. В главе 6 обсуждаются свойства псевдоевклидова пространства-времени, которое широко используется при изучении различных вопросов в специальной теории относительности. В качестве примеров использования полученных соотношений проведено решение ряда задач в неинерциальных системах отсчета.

Глава 7 содержит краткое введение в современные математические модели электродинамики, как линейные, так и нелинейные, в которых широко используются различные тензорные уравнения и соотношения.

В главе 8 излагаются основы общей теории относительности, ее уравнения и некоторые важнейшие решения этих уравнений.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить профессора В.И. Григорьева, прочитавшего учебное пособие в рукописи и сделавшего ряд полезных замечаний.

Москва, 11 апреля 2002 г. И.П.Денисова

ГЛАВА 1
ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В этой главе изучаются различные упорядоченные системы функций, называемые тензорами и играющие важнейшую роль в различных математических моделях естествознания. Здесь дается определение тензора, излагаются основные алгебраические операции над тензорами, вводятся понятия метрического тензора и аксиального тензора Леви-Чивита.

§ 1. Определение тензора

Тензор, как и любое математическое понятие, можно определить несколькими [6] – [9] эквивалентными способами. В математике обычно используется определение, которое оперирует понятиями линейной алгебры.

Определение. Пусть $\mathbf{C}$ является N-мерным линейным пространством над полем $\mathbf{K}$ комплексных чисел. Тензором типа (M, P), где M и P – некоторые целые положительные числа, на $\mathbf{C}$ называется полилинейная (т.е. линейная по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных аргументов) функция F, сопоставляющая каждым M векторам $X_1, X_2, \ldots, X_M$ из $\mathbf{C}$ и P ковекторам $Y^1, Y^2, \ldots, Y^P$ из линейного пространства $\mathbf{C}^*$, сопряженного к исходному пространству $\mathbf{C}$, число $F(X_1, X_2, \ldots, X_M, Y^1, Y^2, \ldots, Y^P) \in \mathbf{K}$.

На основе этого определения можно построить тензорную алгебру и анализ, а также зная, что некоторая система многокомпонентных функций является тензором, можно проводить решение задач.

Однако в различных приложениях физики, механики и математики довольно часто возникает ситуация, когда требуется выяснить является тензором или нет та или иная система многокомпонентных функций. В этом случае более удобным оказывается определение, которое выделяет класс тензорных функций среди остальных систем функций по единственному признаку: строго определенному закону их преобразования при преобразованиях координат, или, как иногда говорят, по трансформационному закону. Именно это определение мы и будем использовать в дальнейшем.

Рассмотрим некоторую область Ω изменения N независимых переменных $x^k = \{x^1, x^2, ..., x^N\}$. Поставим в соответствие каждой точке A рассматриваемой области N-мерного пространства набор из N чисел – координат этой точки: $x^k_A = \{x^1_A, x^2_A, ..., x^N_A\}$. Потребуем, чтобы это соответствие было взаимно однозначным: в заданной координатной системе каждой точке A должен отвечать только один набор $x^k_A = \{x^1_A, x^2_A, ..., x^N_A\}$ значений координат и, наоборот, каждому конкретному набору координат $x^k_A = \{x^1_A, x^2_A, ..., x^N_A\}$ должна соответствовать только одна точка N-мерного пространства.

В N-мерном пространстве или в некоторой его области можно произвести преобразования координат и перейти от исходных координат x^k к новым штрихованным координатам

$$x'^m = F^m(x^1, x^2, ..., x^N) \equiv F^m(x), \tag{1.1}$$

где индекс m пробегает значения от 1 до N.

Зная конкретный вид N функций $F^m(x)$ и координаты некоторой точки A в исходной нештрихованной системе координат $x_A^k = \{x_A^1, x_A^2, ..., x_A^N\}$, по формулам (1.1) можно определить координаты этой точки и в штрихованной системе координат:

$$x_A'^m = F^m(x_A^1, x_A^2, ..., x_A^N) \equiv F^m(x_A).$$

Для того, чтобы и в новой системе координат существовало взаимно однозначное соответствие между точками N-мерного пространства и их штрихованными координатами $x'^m = \{x'^1, x'^2, \ldots, x'^N\}$, система из N функций $F^m(x)$ должна удовлетворять ряду требований, среди которых важнейшими являются два.

Во-первых, эта система функций должна быть дифференцируемой и принадлежать к классу C^p $(p \geq 2)$, т.е. каждая из N функций $F^m(x)$ должна иметь непрерывные частные производные по всем аргументам $x^k = \{x^1, x^2, ..., x^N\}$ до порядка p включительно.

И, во-вторых, определитель Якоби

$$J = det \left\| \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^N} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial x'^N}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^N}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^N}{\partial x^N} \end{vmatrix}, \quad (1.2)$$

который мы в дальнейшем будем называть якобианом, в каждой точке рассматриваемой области N-мерного пространства должен существовать $(|J| < \infty)$ и быть отличным от нуля: $J \neq 0$.

При выполнении этих условий преобразование (1.1) однозначно обратимо, т.е. в окрестности каждой точки рассматриваемой нами области N-мерного пространства будет существовать и обратное преобразование:

$$x^k = f^k(x'^1, x'^2, \ldots, x'^N) \equiv f^k(x'). \tag{1.3}$$

Следует особо подчеркнуть, что система уравнений (1.1) в общем случае зачастую является трансцендентной относительно всех или части переменных $x^1, x^2, \ldots, x^N$, поэтому разрешить ее и найти зависимость (1.3) координат x^k от координат x'^m в явном виде не всегда удается. Но выполнение перечисленных выше двух условий позволяет утверждать, что в окрестности каждой точки система N уравнений (1.1) относительно N неизвестных $x^1, x^2, \ldots, x^N$ имеет решение и это решение единственно. В дальнейшем, не оговаривая особо, мы будем считать, что указанные два условия в рассматриваемых нами областях N-мерного пространства выполняются.

Так как при описании различных математических моделей естествознания используются различные упорядоченные системы функций $\Phi^a(x)$ при $a = 1, 2, \ldots, M$, заданные в каждой точке N-мерного пространства или в некоторой его области, то естественно провести классификацию этих систем функций по их трансформационным свойствам при проведении преобразований координат (1.1) и (1.3).

Наиболее общим понятием, которое включает в себя большое число различных систем упорядоченных функций, является поле геометрического объекта. Дадим его определение.

Полем геометрического объекта (или просто геометрическим объектом) p-го порядка, заданным в некото-

рой области N-мерного пространства, назовем систему упорядоченных функций $\Phi^a(x^1, x^2 \ldots, x^N) \equiv \Phi^a(x)$, изменяющуюся при преобразованиях координат (1.1) и (1.3) по закону:

$$\Phi'^a(x') = W^a\Big(x', \frac{\partial x^m}{\partial x'^{k_1}}, \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{k_1}\partial x'^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^p x^m}{\partial x'^{k_1}\ldots\partial x'^{k_p}},$$

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^p x'^m}{\partial x^{k_1}\ldots\partial x^{k_p}}, \Phi^b\big(x(x')\big)\Big), \qquad (1.4)$$

где $1 \le a \le M$, $1 \le b \le M$, а W^a – некоторая функция всех указанных переменных.

Все величины, стоящие в правой части соотношения (1.4), должны быть выражены как функции штрихованных координат $x'^{\,1}, x'^{\,2}, \ldots, x'^{\,N}$ с помощью преобразования (1.3).

Классификация различных геометрических объектов производится в зависимости от вида функции W^a. Если функция W^a при обращении $\Phi^b\big(x(x')\big)$ в нуль также обращается в нуль, то геометрический объект называется однородным, в противном случае – неоднородным. Если $\Phi^b\big(x(x')\big)$ в функцию W^a входит линейно, то геометрический объект называется линейным.

Сосредоточим пока основное внимание на одном из важнейших частных случаев геометрических объектов – тензорах.

Наиболее простым представителем тензоров является скаляр. Полем скаляра или просто скаляром называется вещественная функция $S(x)$, которая при преобразованиях координат (1.1) и (1.3) преобразуется по закону:

$$S'(x') = S(x(x')). \qquad (1.5)$$

Таким образом, в штрихованной системе координат скаляр $S'(x')$ может быть получен, если в аргументе функции $S(x)$ все нештрихованные координаты $x^1, x^2, \ldots, x^N$ с помощью преобразования (1.3) выразить через штрихованные координаты $x'^{\,1}, x'^{\,2}, \ldots, x'^{\,N}$.

В силу определения (1.5), скаляр является линейным однородным геометрическим объектом нулевого порядка. Скаляр часто еще называют инвариантом (неизменным), так как его значение в любой фиксированной точке не зависит от выбора координат: при преобразованиях (1.1) и (1.3) изменяются только координаты точки, а значение скаляра в этой точке остается неизменным.

Следующим по сложности тензором является вектор. Существуют два типа векторов – ковариантные векторы $A_m(x)$, у которых тензорный индекс m расположен внизу, и контравариантные векторы $B^m(x)$, у которых тензорный индекс расположен вверху. Эти два типа векторов различаются трансформационными законами при преобразованиях координат (1.1) и (1.3).

Ковариантным вектором $A_m(x)$ называется система $A_m(x) = \{A_1(x), A_2(x), \ldots, A_N(x)\}$ из N вещественных функций, являющихся его компонентами, взятых в указанном порядке и при преобразованиях координат (1.1) и (1.3) преобразующихся по закону:

$$A'_m(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\,m}} A_k\Big(x(x')\Big). \tag{1.6}$$

Здесь и далее мы будем широко использовать правило суммирования Эйнштейна: при наличии у некоторого одночлена двух индексов, обозначенных одной и той же буквой и расположенных один вверху (контравариантный

индекс), а другой внизу (ковариантный индекс), предполагается суммирование по всем значениям, которые может принимать данный индекс. Так как в правую часть выражения (1.6) индекс k входит два раза, а он может принимать значения от 1 до N, то в силу правила Эйнштейна в правой части предполагается суммирование по этому индексу от 1 до N. Без использования этого правила выражение (1.6) нам следовало бы записать в виде:

$$A'_m(x') = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\,m}} A_k\Big(x(x')\Big).$$

Хотя это выражение и является наглядным, но наличие знака суммы существенно загромождает запись, особенно в случае более сложных тензорных соотношений.

Рассмотрим закон преобразования (1.6) ковариантного вектора более внимательно. Из этого соотношения видно, что для преобразования ковариантного вектора к штрихованной системе координат необходимо сначала в аргументах каждой компоненты вектора $A_k(x)$, взятой в нештрихованной системе координат, выразить нештрихованные координаты через штрихованные с помощью выражений (1.3): $A_k\big(x(x')\big)$. Затем следует произвести, как иногда говорят, преобразование индекса k, добавив в качестве множителя к вектору $A_k\big(x(x')\big)$ производную $\partial x^k/\partial x'^{\,i}$ и просуммировать по этому индексу от 1 до N. Поэтому в общем случае произвольного преобразования координат каждая компонента ковариантного вектора в штрихованной системе координат будет некоторой линейной комбинацией от всех компонент этого вектора в нештрихованной системе координат.

Контравариантным вектором $B^i(x)$ также называется совокупность из N вещественных функций $B^i(x) = \{B^1(x), B^2(x), \ldots, B^N(x)\}$, взятых в указанном порядке, но при преобразованиях координат (1.1) и (1.3) преобразующихся по иному закону:

$$B'^{\,i}(x') = \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^k} B^k\Big(x(x')\Big). \tag{1.7}$$

Здесь, как и в случае ковариантного вектора, аргументы у компонент вектора в нештрихованной системе координат выражаются через штрихованные координаты, после чего производится преобразование индекса.

Однако, в отличие от ковариантного вектора, для преобразования индекса у контравариантного вектора используются производные от штрихованных координат по нештрихованным: $\partial x'^{\,i}/\partial x^k$.

Таким образом, ковариантные и контравариантные векторы являются линейными однородными геометрическими объектами первого порядка.

Рассмотрим теперь более общий случай тензора, который имеет несколько ковариантных и контравариантных индексов. M раз контравариантным и U раз ковариантным тензором $T^{j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_U}(x)$ мы будем называть совокупность N^{M+U} функций, взятых в указанном порядке и при преобразованиях координат (1.1) и (1.3) преобразующихся по закону:

$$T'^{\,j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_U}(x') = \left(\frac{\partial x'^{\,j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x'^{\,j_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial x'^{\,j_M}}{\partial x^{k_M}}\right) \times \tag{1.8}$$

$$\times \left(\frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{\,i_1}} \cdot \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{\,i_2}} \cdots \frac{\partial x^{m_U}}{\partial x'^{\,i_U}}\right) \cdot T^{k_1 k_2 \ldots k_M}_{m_1 m_2 \ldots m_U}\Big(x(x')\Big).$$

Из этого определения видно, что закон преобразования тензора $T^{j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_U}(x)$ обобщает законы преобразования ковариантных и контравариантных векторов: для получения компонент этого тензора в штрихованной системе координат необходимо сначала у компонент этого тензора $T^{k_1 k_2 \ldots k_M}_{m_1 m_2 \ldots m_U}(x)$, взятых в нештрихованной системе, с помощью соотношений (1.3) выразить в аргументе нештрихованные координаты через штрихованные, а затем у получившегося тензора $T^{k_1 k_2 \ldots k_M}_{m_1 m_2 \ldots m_U}\Big(x(x')\Big)$ провести преобразование каждого из индексов по законам преобразования индексов ковариантных и контравариантных векторов.

Таким образом, тензор в силу закона преобразования (1.8) является линейным однородным геометрическим объектом первого порядка.

Сумму чисел ковариантных и контравариантных индексов обычно называют рангом тензора. В соответствии с этим определением скаляр является тензором нулевого ранга, ковариантный и контравариантный векторы – тензорами первого ранга, а входящий в выражение (1.8) тензор $T^{j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_U}(x)$ – тензором $(M+U)$-го ранга.

Тензор при любом числе ковариантных и контравариантных индексов называется равным нулю в некоторой точке области N-мерного пространства, если все его компоненты равны нулю в этой точке. Из закона преобразования (1.8) тензора следует, что обращение тензора в нуль в некоторой точке является инвариантным (независимым) от выбора координат: если в какой-либо системе координат тензор в некоторой точке пространства равен нулю, то он будет равен нулю в этой точке и при переходе к любой другой системе координат. И, наоборот, если в некоторой точке тензор не равен нулю, то никаким пре-

образованием координат его невозможно обратить в этой точке в нуль.

Очень важным частным случаем тензора, широко используемого в различных областях математики, механики и физики, является тензор Кронекера δ_j^k, равный единице, если его индексы совпадают, и нулю, если его индексы разные:

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \tag{1.9}$$

Покажем, что этот тензор при преобразованиях координат (1.1) и (1.3) не изменяется. Для этого запишем закон преобразования этого тензора:

$$\delta'^{\,k}_{j} = \frac{\partial x'^{\,k}}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,j}} \delta_n^m. \tag{1.10}$$

В силу определения (1.9) индексы m и n в этом соотношении должны быть равны. Поэтому выражение (1.10) примет вид:

$$\delta'^{\,k}_{j} = \frac{\partial x'^{\,k}}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,j}}.$$

Применяя правила дифференцирования функций, будем иметь

$$\delta'^{\,k}_{j} = \frac{\partial x'^{\,k}}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,j}} = \frac{\partial x'^{\,k}}{\partial x'^{\,j}} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \tag{1.11}$$

Сравнивая это выражение с определением (1.9), видим, что при любых преобразованиях координат тензор Кронекера не изменяется.

Отметим также еще одно важное свойство закона преобразования тензоров. В силу правил дифференцирования сложных функций $x^n = x^n\Big(x'(x'')\Big)$ и $x''^{\,n} = x''^{\,n}\Big(x'(x)\Big)$ мы имеем:

$$\frac{\partial x^n}{\partial x''^{\,k}} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,j}}\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x''^{\,k}}, \qquad \frac{\partial x''^{\,n}}{\partial x^k} = \frac{\partial x''^{\,n}}{\partial x'^{\,j}}\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^k}.$$

Поэтому преобразование тензора от координат x^n к некоторым координатам $x'^{\,j}$, а от них к координатам $x''^{\,k}$, будет совпадать с преобразованием сразу от координат x^n к координатам $x''^{\,k}$. Кроме того, для каждого преобразования координат существует обратное преобразование, возвращающее нас в исходную систему координат, а также тождественное преобразование $x^k = x'^{\,k}$, при котором координатная система не изменяется. Это означает [9], что преобразования тензоров образуют группу.

До сих пор мы рассматривали так называемые полярные, или истинные, тензоры. Однако в математике, механике и физике, наряду с полярными тензорами, используются и аксиальные тензоры (псевдотензоры), закон преобразования компонент которых отличается от закона (1.8) преобразования тензора наличием множителя $sgn(J) = J/|J|$. Этот множитель определяет знак якобиана J преобразования:

$$sgn(J) = \begin{cases} +1, & J > 0, \\ -1, & J < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $A'^{\,j_1 j_2 \dots j_M}_{n_1 n_2 \dots n_U}(x)$ – аксиальный тензор, то его закон преобразования при преобразованиях координат (1.1) и (1.3) имеет вид:

$$A'^{\,j_1 j_2 \dots j_M}_{n_1 n_2 \dots n_U}(x') = sgn(J) \cdot \left(\frac{\partial x'^{\,j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x'^{\,j_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial x'^{\,j_M}}{\partial x^{k_M}}\right) \times$$

$$\times\left(\frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{\,n_1}}\cdot\frac{\partial x^{l_2}}{\partial x'^{\,n_2}}\cdots\frac{\partial x^{l_U}}{\partial x'^{\,n_U}}\right)\cdot A^{k_1k_2\ldots k_M}_{l_1l_2\ldots l_U}\Big(x(x')\Big). \quad (1.12)$$

И, наоборот, если геометрический объект при преобразованиях координат (1.1) и (1.3) преобразуется по закону (1.12), то он является U раз ковариантным и M раз контравариантным аксиальным тензором (аксиальным тензором $(M+U)$-го ранга).

Простейшим преобразованием координат, у которого якобиан отрицателен, является переход от исходной правой системы координат к левой системе координат, когда нечетное число координатных осей изменяет свое направление на противоположное. Эти преобразования имеют вид:

$$x'^{\,1}=-x^1,\ x'^{\,2}=-x^2,\ldots,\ x'^{\,2s+1}=-x^{2s+1},$$

$$x'^{\,2s+2}=x^{2s+2},\ldots,\ x'^{\,N}=x^N.$$

Поэтому если в какой-то исходной правой системе координат компоненты тензора оказались равными соответствующим компонентам аксиального тензора, то при переходе к левой системе координат это равенство нарушится.

Следует отметить, что наряду с тензорами и аксиальными тензорами используются и их плотности веса w. Законы преобразования тензорной плотности и аксиальной тензорной плотности отличаются от законов преобразований (1.8) и, соответственно, (1.12) наличием в правой части множителя $|J|^{-w}$. Таким образом, тензор и аксиальный тензор являются частными случаями тензорной плотности и, соответственно, аксиальной тензорной плотности с равными нулю весами.

Задачи

1. Какой геометрический объект образуют четыре компоненты $\partial S(x)/\partial x^m$ (четырехмерный градиент), если $S(x)$ – скаляр?

Решение. Так как $S(x)$ – скаляр, то при преобразовании координат (1.1) и (1.3) он преобразуется по закону (1.5): $S'(x') = S\big(x(x')\big)$. Продифференцируем правую и левую части этого равенства по $x'^{\,i}$:

$$\frac{\partial S'(x')}{\partial x'^{\,i}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\,i}} S\big(x(x')\big).$$

Учитывая правило дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\,i}} S\big(x(x')\big) = \frac{\partial S(x)}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,i}},$$

имеем окончательно

$$\frac{\partial S'(x')}{\partial x'^{\,i}} = \frac{\partial S(x)}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,i}}.$$

Таким образом, четырехмерный градиент от скалярной функции $S(x)$ при преобразовании координат преобразуется по закону (1.6) ковариантного вектора. Следовательно, четырехмерный градиент от скалярной функции $S(x)$ является ковариантным вектором.

2. Какой геометрический объект образуют четыре компоненты дифференциала координат dx^k?

Решение. Взяв дифференциалы от правой и левой частей равенства $x'^{\,i} = x'^{\,i}(x^n)$, имеем: $dx'^{\,i} = dx'^{\,i}(x^n)$. Учитывая правило дифференцирования сложных функций, отсюда получим:

$$dx'^{\,i} = \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^k} dx^k.$$

Сравнивая это равенство с законом преобразования (1.7), приходим к выводу, что dx^k является контравариантным вектором.

§ 2. Основные алгебраические операции с тензорами

Рассмотрим алгебраические операции с тензорами, которые не выводят нас из класса тензоров, т.е. такие операции над тензорами, в результате которых получается тензор. Этих операций четыре: умножение и сложение тензоров, перестановка и свертывание тензорных индексов. Рассмотрим их по очереди.

Алгебраическая операция умножения тензоров обобщает хорошо известную в математике операцию умножения скалярных функций $a(x)$ и $b(x)$: $f(x) = a(x)b(x)$. Совершенно аналогично, произведением M раз ковариантного и U раз контравариантного тензора $A^{i_1 i_2 \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_M}(x)$ на некоторый S раз ковариантный и Q раз контравариантный тензор $B^{n_1 n_2 \ldots n_Q}_{j_1 j_2 \ldots j_S}(x)$ мы будем называть $M+S$ раз ковариантный и $Q+U$ раз контравариантный тензор $F^{i_1 i_2 \ldots i_U n_1 n_2 \ldots n_Q}_{k_1 k_2 \ldots k_M j_1 j_2 \ldots j_S}(x)$, компоненты которого в каждой локальной системе координат получаются перемножением соответствующих компонент сомножителей:

$$F^{i_1 i_2 \ldots i_U n_1 n_2 \ldots n_Q}_{k_1 k_2 \ldots k_M j_1 j_2 \ldots j_S}(x) = A^{i_1 i_2 \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_M}(x) B^{n_1 n_2 \ldots n_Q}_{j_1 j_2 \ldots j_S}(x). \quad (2.1)$$

Следует отметить, что оба сомножителя в этом выражении должны быть взяты в одной и той же точке N-мерного пространства. Тогда правая и левая части этого выражения при преобразованиях координат будут иметь одинаковые законы преобразования. Если же сомножители в правой части соотношения (2.1) взять в разных точках, результирующий геометрический объект в общем случае не будет тензором (см. задачу § 2). Частным случаем умножения тензоров является умножение тен-

зора на произвольное число, являющееся, как известно, скаляром.

Алгебраическая операция сложения применима к тензорам, имеющим одинаковое число ковариантных и, соответственно, контравариантных индексов, причем оба слагаемых должны быть взяты в одной и той же точке N-мерного пространства. Результатом алгебраического сложения тензоров $A^{i_1 i_2 \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_M}(x)$ и $B^{i_1 i_2 \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_M}(x)$ является тензор $C^{i_1 i_2 \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_M}(x)$, компоненты которого получаются алгебраическим сложением соответствующих компонент слагаемых:

$$C^{i_1 i_2 \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_M}(x) = A^{i_1 i_2 \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_M}(x) + B^{i_1 i_2 \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_M}(x).$$

Операция перестановки индексов позволяет по любому заданному тензору получать, вообще говоря, новые тензоры путем изменения порядка следования двух или более одноименных (ковариантных или контравариантных) индексов в записи первоначального тензора.

Рассмотрим, например, ковариантный тензор третьего ранга $A_{ijk}(x)$. В результате операции перестановки индексов мы можем получить 3!=6 в общем случае различных тензоров:

$$A_{ijk}(x),\ B_{ijk}(x) = A_{jik}(x),\ C_{ijk}(x) = A_{ikj}(x),$$

$$D_{ijk}(x) = A_{kji}(x),\ F_{ijk}(x) = A_{kij}(x),\ H_{ijk}(x) = A_{jki}(x).$$

Так как в определение тензора входит и порядок следования его индексов, то в общем случае $A_{ijk}(x) \neq B_{ijk}(x)$.

Обычно говорят, что перестановка индексов называется четной, если она получена из исходного располо-

жения индексов четным числом перестановок этих индексов, и нечетной – если она получена нечетным числом перестановок. В приведенном выше примере тензоры $B_{ijk}(x)$, $C_{ijk}(x)$, $D_{ijk}(x)$ получены нечетными перестановками индексов у исходного тензора $A_{ijk}(x)$, а тензоры $F_{ijk}(x)$, $H_{ijk}(x)$ – четными.

Тензор называется симметричным по двум или более одноименным индексам, если он не изменяется при проведении операции перестановки этих индексов. Тензор называется антисимметричным по двум или более одноименным индексам, если при совершении нечетных перестановок этих индексов тензор изменяет знак.

Операция перестановки индексов является составной частью операций симметрирования и альтернирования.

Операция симметрирования по M одноименным индексам производится следующим образом. Сначала строится $M!$ тензоров, получаемых из первоначального тензора всевозможными перестановками указанных M индексов. После этого берется среднее арифметическое от $M!$ полученных при этом тензоров.

Индексы, по которым производится симметрирование, заключаются в круглые скобки, а попавшие внутрь этих скобок индексы, по которым не производится симметрирование, выделяются вертикальными черточками.

Рассмотрим, например, контравариантный тензор седьмого ранга $A^{ijklmnp}(x)$. Проведем симметрирование этого тензора по первому i , третьему k и шестому n индексам. В результате получим тензор, симметричный относительно любой перестановки этих индексов:

$$A^{(i|j|k|lm|n)p}(x) = \frac{1}{3!}\Big[A^{ijklmnp}(x) + A^{kjilmnp}(x) +$$

$$+A^{ijnlmkp}(x)+A^{njklmip}(x)+A^{njilmkp}(x)+A^{kjnlmip}(x)\Big].$$

Для проведения операции альтернирования тензора по M одноименным индексам также необходимо произвести $M!$ всевозможных перестановок этих индексов, затем изменить знаки на противоположные у тензоров, полученных нечетными перестановками, и взять среднее арифметическое от всех полученных при этом $M!$ тензоров. Индексы, по которым производится альтернирование, заключаются в квадратные скобки. В частности, альтернируя тензор $A^{ijklmnp}(x)$ по тем же индексам, будем иметь:

$$A^{[i|j|k|lm|n]p}(x)=\frac{1}{3!}\Big[A^{ijklmnp}(x)-A^{kjilmnp}(x)-$$

$$-A^{ijnlmkp}(x)-A^{njklmip}(x)+A^{njilmkp}(x)+A^{kjnlmip}(x)\Big].$$

Несложно убедиться, что в результате мы получили тензор антисимметричный относительно перестановки любых двух индексов, по которым производится альтернирование.

И, наконец, четвертой алгебраической операцией над тензорами, не выводящей нас из класса тензоров, является операция свертки индексов. Эта операция применима только к тензорам, имеющим хотя бы по одному ковариантному и контравариантному индексам.

В результате операции свертывания по s-ому контравариантному и r-му ковариантному индексам у тензора $T^{i_1 i_2 \ldots i_{s-1} i_s i_{s+1} \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_{r-1} k_r k_{r+1} \ldots k_M}(x)$ получается тензор с уменьшенными на единицу числами ковариантных и контравариантных индексов. По традиции этот тензор обозначается той

же буквой, что и исходный тензор:

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_{r-1} k_{r+1} \ldots k_M}(x) = \sum_{j=1}^{N} T^{i_1 i_2 \ldots i_{s-1} j i_{s+1} \ldots i_U}_{k_1 k_2 \ldots k_{r-1} j k_{r+1} \ldots k_M}(x).$$

В дальнейшем знак суммы при записи этой операции мы будем опускать, предполагая, что в силу правила суммирования Эйнштейна, по ковариантному и контравариантному индексам, обозначенным одинаковой буквой, производится суммирование по всем значениям, которые может принимать эта буква (индекс).

К аксиальным тензорам применимы те же самые алгебраические операции, что и к тензорам. Вместе с тем алгебраически складывать тензор с аксиальным тензором нельзя, так как результатом будет нетензорный геометрический объект. Умножать же аксиальный тензор можно как на истинный тензор, так и на другой аксиальный тензор. Результатом этой операции в первом случае будет аксиальный тензор, а во втором, в силу соотношения $sgn(J)^2 = 1$, – истинный тензор.

Операции перестановки индексов, а также их свертки у аксиальных тензоров производятся аналогично соответствующим операциям у истинных тензоров.

Задача

Доказать, что произведение двух тензоров, взятых в разных точках пространства, не является тензором.

Решение. Рассмотрим произведение ковариантного вектора F_i, взятого в некоторой точке $x = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}$, и ковариантного вектора H_k, взятого в точке $\tilde{x} = \{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^N\}$. Полученный таким образом геометрический объект обозначим G_{ik} :

$$G_{ik} = F_i(x) H_k(\tilde{x}). \qquad (1)$$

Найдем закон преобразования этого объекта при преобразованиях координат (1.1) и (1.3). В силу определения (1) объекта G_{ik}, в штрихованной системе координат имеем:

$$G'_{ik} = F'_i(x')H'_k(\tilde{x}'). \tag{2}$$

Так как $F_i(x)$ и $H_k(\tilde{x})$ – тензоры, то

$$F'_i(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}(x')F_m\big(x(x')\big), H'_k(\tilde{x}') = \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \tilde{x}'^k}(\tilde{x}')H_n\big(\tilde{x}(\tilde{x}')\big).$$

Подставляя эти выражения в соотношение (2), получим:

$$G'_{ik} = F'_i(x')H'_k(\tilde{x}') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}(x')\frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \tilde{x}'^k}(\tilde{x}')\times$$

$$\times F_m\big(x(x')\big)H_n\big(\tilde{x}(\tilde{x}')\big). \tag{3}$$

Если бы геометрический объект G_{ik} был тензором, то его закон преобразования имел бы вид:

$$G'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}(x')\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}(x')G_{mn}\big(x(x')\big) = \tag{4}$$

$$= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}(x')\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}(x')F_m\big(x(x')\big)H_n\big(x(x')\big).$$

Так как при произвольном преобразовании координат производные, взятые в разных точках, не совпадают

$$\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}(x') \neq \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial \tilde{x}'^i}(\tilde{x}'),$$

то сравнение выражений (3) и (4) позволяет утверждать, что геометрический объект G_{ik} не является тензором.

§ 3. Метрический тензор псевдориманова пространства

Рассмотрим некоторый ковариантный тензор второго ранга $g_{ik}(x)$. Предположим, что этот тензор является симметричным: $g_{ik}(x) = g_{ki}(x)$. Сопоставим компонентам этого тензора матрицу размерности $N \times N$, строки которой нумеруются первым индексом тензора g_{ik}, а столбцы – вторым индексом:

$$G = ||g_{ik}|| = \begin{pmatrix} g_{11}, & g_{12}, & \cdots & g_{1N} \\ g_{21}, & g_{22}, & \cdots & g_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{N1}, & g_{N2}, & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы будем обозначать буквой g без индексов: $g = det\ ||g_{ik}||$. Если эта матрица является невырожденной ($g \neq 0$), то мы можем построить обратную матрицу G^{-1} :

$$G \cdot G^{-1} = I,$$

где I – единичная матрица.

Сопоставим элементы матрицы G^{-1} компонентам контравариантного тензора g^{km}. В силу такого определения тензор g^{km} должен удовлетворять соотношению:

$$g_{ik}g^{km} = \delta_i^m, \tag{3.1}$$

а его определитель будет обратен определителю тензора g_{ik} : $det\ ||g^{km}|| = 1/g$.

Если тензор g_{ik}, обладающий указанными свойствами, используется для получения квадрата расстояния,

который мы обозначим через ds^2, между двумя бесконечно близкими точками $x^i = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}$ и $x^i + dx^i = \{x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \ldots, x^N + dx^N\}$ в соответствии с равенством

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \tag{3.2}$$

то этот тензор называется метрическим тензором.

В этом случае N-мерное пространство, в каждой точке которого задан метрический тензор, называется N-мерным римановым пространством. Величину ds^2 мы также будем называть квадратом интервала.

Изучим алгебраические свойства метрического тензора. Найдем сначала закон преобразования его определителя. Для этого запишем закон преобразования метрического тензора:

$$g'_{ik}(x') = \frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,i}} \frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,k}} g_{nm}\big(x(x')\big).$$

В матричных обозначениях это равенство принимает вид:

$$G'(x') = \Big(\Lambda\big(\Lambda G(x(x'))\big)^T\Big)^T,$$

где $\Lambda = ||\partial x^n / \partial x'^i||$, а знак T обозначает операцию транспонирования матрицы.

Возьмем определитель от правой и левой частей этого равенства. Учитывая свойства определителя и используя обозначение $g = det\ ||g_{ik}||$, будем иметь

$$g'(x') = det^2||\Lambda||\ g\big(x(x')\big).$$

Так как матрица Λ обратна матрице $||\partial x'^{\,i}/\partial x^m||$, то $det||\Lambda|| = J^{-1}$ в силу определения (1.2). В результате

приходим к соотношению:

$$g'(x') = J^{-2} g\big(x(x')\big). \tag{3.3}$$

Таким образом, определитель метрического тензора не является скаляром, а является более сложным геометрическим объектом. В соответствии с классификацией геометрических объектов определитель метрического тензора является плотностью скаляра веса +2.

Построим теперь выражение для дифференциала от определителя метрического тензора. Для этого рассмотрим геометрический объект:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = \Delta^{ik}. \tag{3.4}$$

Правило разложения определителя позволяет утверждать, что Δ^{ik} является алгебраическим дополнением элемента g_{ik}. Тогда, в соответствии с правилом нахождения обратной матрицы и определением тензора g^{ik}, как тензора, соответствующая матрица которого обратна матрице g_{ik}, выражение (3.4) можно записать в виде:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = g g^{ik}.$$

В результате имеем:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial g_{ik}} dg_{ik} = g g^{ik} dg_{ik}. \tag{3.5}$$

Учитывая соотношение (см. задачу 1 § 3)

$$dg_{ik} = -g_{im} g_{kn} dg^{mn},$$

выражение (3.5) можно записать в виде:

$$dg = -g g_{ik} dg^{ik}. \tag{3.6}$$

Полученные соотношения (3.5) и (3.6) в римановых пространствах играют важную роль, позволяя упрощать ряд сложных выражений.

Так как метрический тензор является центральным объектом при построении в римановых пространствах различных тензорных выражений, то изучим подробнее его свойства. Для этого рассмотрим выражение (3.2) для квадрата интервала. В каждой фиксированной точке N-мерного пространства квадрат интервала (3.2) представляет собой квадратичную форму от дифференциалов координат dx^i, коэффициенты которой в рассматриваемой точке постоянны. Поэтому в каждой фиксированной точке к выражению (3.2) для квадрата интервала мы можем применять все положения и выводы теории квадратичных форм.

Следовательно, в любой заданной точке N-мерного пространства линейным неособенным преобразованием дифференциалов dx^i квадрат интервала (3.2) может быть приведен к диагональному виду, причем в силу теоремы об инерции индекса квадратичной формы, разность чисел положительных и отрицательных слагаемых в диагональной квадратичной форме будет зависеть только лишь от значений компонент метрического тензора в рассматриваемой точке. Эта разность называется сигнатурой метрического тензора N-мерного пространства в данной точке. Следует отметить, что иногда сигнатурой метрического тензора называют также и совокупность знаков диагональных компонент этого тензора в каждой точке.

N-мерные пространства, сигнатура которых не совпадает с размерностью пространства, по предложению математика Ф.Клейна называют псевдоримановыми пространствами. Или, говоря другими словами, псевдоримановым пространством $R^N_{p,N-p}$ называется N-мерное пространство, сигнатура метрики которого содержит p знаков плюс и $N-p$ знаков минус. В этом случае метрический тензор в любой заданной точке неособенным преобразованием координат может быть приведен к виду:

$$g_{ik} = \mathrm{diag}\,(\underbrace{+1, +1, \ldots}_{p}, \underbrace{-1, -1, \ldots}_{N-p}).$$

Если $p = 0$ или $p = N$, то псевдориманово пространство превращается в чисто риманово пространство.

С помощью метрического тензора можно построить выражение для квадрата любого вектора A_m :

$$A_m A_k g^{mk} = A^m A^k g_{mk} = A_k A^k.$$

Следует однако отметить, что в произвольном псевдоримановом пространстве квадрат вектора не является знакоопределенной величиной.

Совершенно аналогично и квадрат интервала ds^2, как квадрат вектора dx^k, может быть положительным, равным нулю или отрицательным. В первом случае вектор dx^k называют времениподобным, при равенстве его квадрата нулю – изотропным и в случае, когда его квадрат отрицателен – пространственноподобным.

Выражение для квадрата интервала ds^2 широко используется при решении различных задач механики и

электродинамики. В частности, в четырехмерном псевдоримановом пространстве-времени уравнение

$$ds^2 = 0 \tag{3.7}$$

описывает распространение электромагнитных сигналов.

Помимо построения квадратичной формы ds^2, ковариантные g_{ik} и контравариантные g^{km} компоненты метрического тензора используются для проведения очень важной операции опускания и поднятия индексов у тензоров, суть которой становится понятной из следующих выражений:

$$A_{\cdot j\cdot}^{i\cdot k} = g_{jn} A^{ink}, \qquad A_{\cdot j\cdot}^{i\cdot k} = g^{in} A_{nj\cdot}^{\cdot\cdot k}. \tag{3.8}$$

В этих выражениях точками обозначены вакансии, на которые могут помещаться индексы при их опускании и поднятии.

Возникает вопрос, а как могут быть найдены выражения для компонент метрического тензора. Как мы увидим далее, метрический тензор определяется геометрией N-мерного пространства и в любой системе координат его компоненты могут быть однозначно найдены, если задано явное выражение (3.2) для ds^2 или задан алгоритм для построения этого выражения.

Следует отметить, что в некоторых физических теориях этот тензор является полевой переменной и определяется из полевых уравнений, т.е. из системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в которую метрический тензор входит в качестве неизвестной величины. Так, например, в общей теории относительности Эйнштейна [5] этот тензор является полевой переменной, описывающей гравитационное

поле, источником которого служат компоненты тензора энергии-импульса материи.

Задачи

1. Найти связь между дифференциалами ковариантных компонент метрического тензора и дифференциалами его контравариантных компонент.

Решение. В силу определения (3.1) имеем:

$$g_{ik}g^{km} = \delta_i^m. \tag{1}$$

Возьмем дифференциал от правой и левой частей этого равенства. Так как в любой системе координат тензор Кронекера δ_i^m в силу соотношения (1.9) принимает постоянные значения, то его дифференциал равен нулю. Поэтому из соотношения (1) получим:

$$g_{ik}dg^{km} = -g^{km}dg_{ik}. \tag{2}$$

Умножая это равенство на g^{ni} и учитывая определение (3.1), будем иметь:

$$dg^{nm} = -g^{ni}g^{km}dg_{ik}.$$

Умножая равенство (2) на g_{mn}, приходим к аналогичному соотношению:

$$dg_{ni} = -g_{nm}g_{ik}dg^{mk}.$$

2. В декартовых координатах трехмерного евклидова пространства метрический тензор имеет вид

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Найти выражение для тензоров g'_{ik} и g'^{ik} в цилиндрической и сферической системах координат.

Решение. Метрический тензор преобразуется по закону:

$$g'_{ik} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{nm}. \tag{2}$$

В исходной декартовой системе координат $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$.

а). В цилиндрической системе координат $x'^1 = r$, $x'^2 = \varphi, x'^3 = z$. Используя эти соотношения, выразим нештрихованные (декартовы) координаты через штрихованные (цилиндрические)

$$x^1 = x'^1 \cos x'^2, \quad x^2 = x'^1 \sin x'^2, \quad x^3 = x'^3.$$

Найдем все неравные нулю производные нештрихованных координат по штрихованным:

$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} = -r\sin\varphi, \tag{3}$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} = \sin\varphi, \qquad \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = r\cos\varphi, \qquad \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = 1.$$

Используя соотношение (2), найдем шесть независимых компонент симметричного тензора g'_{ik} в штрихованной системе координат. Эти шесть компонент соответствуют наборам индексов $i \leq k$, где i и k пробегают значения от 1 до 3. Начнем с компоненты g'_{11}. Полагая в выражении (2) $i = k = 1$ и раскрывая суммирование по индексу m, получим

$$g'_{11} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^1}\frac{\partial x^m}{\partial x'^1} g_{nm} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^1}\Big[\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} g_{n1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} g_{n2} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} g_{n3}\Big].$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражения (3), раскроем суммирование по индексу n :

$$g'_{11} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} g_{n1} \cos\varphi + \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} g_{n2} \sin\varphi =$$

$$= \Big[\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} g_{21} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} g_{31}\Big] \cos\varphi +$$

$$+ \Big[\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} g_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} g_{22} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} g_{32}\Big] \sin\varphi.$$

Подставляя в это выражение соотношения (1) и (3), будем иметь: $g'_{11} = 1$.

Поступая аналогично и при остальных значениях $i \leq k$, приходим к следующему результату:

$$g'_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Контравариантные компоненты g'^{nm} метрического тензора можно найти из уравнения:

$$g'_{ik} g'^{km} = \delta_i^m. \tag{5}$$

При $i = m = 1$ имеем

$$g'_{1k} g'^{k1} = g'_{11} g'^{11} + g'_{12} g'^{21} + g'_{13} g'^{31} = 1.$$

Подставляя в это равенство ковариантные компоненты метрического тензора (4), получим $g'^{11} = 1$. Поступая аналогично, найдем и остальные компоненты:

$$g'^{nm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

б). В сферической системе координат $x'^1 = r$, $x'^2 = \theta$, $x'^3 = \varphi$ и преобразование координат имеет вид:

$$x^1 = x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3, \qquad x^2 = x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3,$$

$$x^3 = x'^1 \cos x'^2.$$

Составляя производные $\partial x^n / \partial x'^i$ и используя закон преобразования метрического тензора (2), найдем

$$g'_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Используя уравнение (5), можно получить контравариантные компоненты метрического тензора g'_{nm} в сферической системе координат:

$$g'_{nm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2 \sin^2\theta) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

§ 4. Тензорное обобщение символа Леви-Чивита

Определив метрический тензор, введем теперь тензорный аналог абсолютно антисимметричного символа Леви-Чивита. Как известно, в линейной алгебре и в ее различных приложениях широко используется символ Леви-Чивита $e^{i_1 i_2 \cdots i_N}$, обладающий свойствами абсолютной антисимметрии по отношению к операции перестановки любых его двух индексов:

$$e^{i_1 i_2 \cdots i_N} = -e^{i_2 i_1 \cdots i_N} = -e^{i_1 i_2 \cdots i_N i_{N-1}}. \tag{4.1}$$

Из этого свойства непосредственно следует, что компоненты символа Леви-Чивита $e^{i_1 i_2 \cdots i_N}$, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, а не равными нулю могут быть только те компоненты, у которых все индексы разные. Так как число индексов у символа Леви-Чивита совпадает с размерностью пространства, то отличными от нуля будут только компонента $e^{12\cdots N}$ и компоненты, получаемые из нее различными перестановками индексов.

Обычно принимают, что $e^{12\cdots N} = +1$ и тем самым все ненулевые компоненты символа Леви-Чивита будут равны ± 1, в зависимости от того, четной или нечетной перестановкой индексов они могут быть получены из компоненты $e^{12\cdots N}$.

В линейной алгебре обычно не делается различия между компонентами $e^{12\cdots N}$ и $e_{12\ldots N}$ символа Леви-Чивита, в результате чего компонента $e_{12\cdots N}$ также равна единице: $e_{12\ldots N} = 1$.

Это позволяет использовать эти символы для раскрытия определителя $N \times N$ матрицы $\| a_{ik} \|$ непосредственно через ее элементы, минуя миноры:

$$e^{i_1 i_2 \cdots i_N} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_N j_N} = e_{j_1 j_2 \cdots j_N} \det \| a_{ik} \| . \qquad (4.2)$$

Следует однако отметить, что в физике иногда используют другое определение символа Леви-Чивита, согласно которому компоненты $e^{12\cdots N}$ и $e_{12\ldots N}$ различаются множителем $(-1)^{N-p}$: $e_{12\ldots N} = (-1)^{N-p} e^{12\cdots N}$. Мы же в дальнейшем будем считать, что $e_{12\ldots N} = e^{12\cdots N}$.

Так как соотношение (4.2) позволяет компактно записывать алгебраические операции над матрицами, то полезно получить тензорный аналог этого соотношения.

Для этого построим, прежде всего, тензорное обобщение символа Леви-Чивита.

Однако непосредственно использовать символ $e^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ в качестве аксиального тензора $E^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ нельзя. Для того, чтобы в этом убедиться, выясним геометрическую природу объекта $X^{i_1 i_2 \cdots i_N}$, который в декартовой системе координат имеет вид:

$$X^{i_1 i_2 \cdots i_N} = e^{i_1 i_2 \cdots i_N}.$$

Предположим, что этот объект является аксиальной тензорной плотностью веса w. Тогда при переходе к криволинейной системе координат он должен принимать вид:

$$X'^{i_1 i_2 \cdots i_N} = \frac{sgn(J)}{|J|^w} \frac{\partial x_1'^i}{\partial x_1^j} \frac{\partial x_2'^i}{\partial x_2^j} \cdots \frac{\partial x'^{i_N}}{\partial x_N^j} X^{j_1 j_2 \cdots j_N}(x(x')) =$$

$$= sgn(J)|J|^{-w} \frac{\partial x_1'^i}{\partial x_1^j} \frac{\partial x_2'^i}{\partial x_2^j} \cdots \frac{\partial x'^{i_N}}{\partial x_N^j} e^{j_1 j_2 \cdots j_N}.$$

Но в силу соотношения (4.2) правая часть этого равенства оказывается пропорциональной якобиану J преобразования от декартовых координат к криволинейным:

$$e'^{i_1 i_2 \cdots i_N} = X'^{i_1 i_2 \cdots i_N} = sgn(J)|J|^{-w} det \left\| \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right\| e^{i_1 i_2 \cdots i_N} =$$

$$= sgn(J)|J|^{(1-w)} e^{i_1 i_2 \cdots i_N}. \qquad (4.3)$$

Так как символ Леви-Чивита во всех системах координат сохраняет свои значения, равные нулю или ± 1 в соответствии с равенствами (4.1), то $e'^{i_1 i_2 \cdots i_N} = e^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ и

соотношение (4.3) будет непротиворечивым при любых значениях $J \neq 0$ только если $w = 1$. Отсюда следует, что символ Леви-Чивита $e^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ можно рассматривать как компоненты аксиальной тензорной плотности веса $+1$. Для того чтобы из аксиальной тензорной плотности $e^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ веса $+1$ получить аксиальный тензор нам необходимо разделить ее на какую-нибудь плотность скаляра веса $+1$.

Проще всего это сделать, если использовать определитель из метрического тензора $g = \det \parallel g_{ik} \parallel$. Действительно, определитель метрического тензора, в силу соотношения (3.3), является скалярной плотностью веса $+2$, а квадратный корень из его модуля – скалярной плотностью веса $+1$. Так как метрический тензор, по своему определению, должен быть невырожденным, то $g \neq 0$ и мы для получения аксиального тензора $E^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ можем разделить символ Леви-Чивита $e^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ на $\sqrt{|g|}$.

Определим абсолютно антисимметричный аксиальный тензор $E^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ в соответствии с равенством:

$$E^{i_1 i_2 \cdots i_N} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} e^{i_1 i_2 \cdots i_N}. \tag{4.4}$$

Опуская у этого тензора индексы, используя соотношение (4.2) и учитывая, что $g = (-1)^{N-p}|g|$ в пространстве $R^N_{p,N-p}$, получим выражение, связывающее ковариантные компоненты аксиального тензора $E_{j_1 j_2 \cdots j_N}$ с символом Леви-Чивита $e_{j_1 j_2 \cdots j_N}$:

$$E_{j_1 j_2 \cdots j_N} = g_{j_1 i_1} g_{j_2 i_2} \cdots g_{j_N i_N} E^{i_1 i_2 \cdots i_N} =$$

$$= \frac{g}{\sqrt{|g|}} e_{j_1 j_2 \cdots j_N} = (-1)^{N-p} \sqrt{|g|} e_{j_1 j_2 \cdots j_N}. \tag{4.5}$$

Введенный таким образом абсолютно антисимметричный аксиальный тензор является тензорным обобщением символа Леви-Чивита и, в силу соотношения (4.4), при преобразованиях координат преобразуется по закону:

$$E'^{i_1 i_2 \cdots i_N} = sgn(J) \frac{\partial x_1'^i}{\partial x_1^j} \frac{\partial x_2'^i}{\partial x_2^j} \cdots \frac{\partial x' i_N}{\partial x_N^j} E^{j_1 j_2 \cdots j_N}.$$

В дальнейшем, для краткости, этот абсолютно антисимметричный аксиальный тензор мы будем называть просто тензором Леви-Чивита. Заметим, что в линейной алгебре [9] его часто называют дискриминантным тензором.

ГЛАВА 2
ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ В N-МЕРНОМ ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 5. Ковариантное дифференцирование

Переходя к тензорному анализу в N-мерном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$, необходимо так определить дифференцирование тензоров, чтобы его результатом была тензорная величина. Несложно убедиться, что частная производная от тензора таким свойством не обладает. Действительно, рассмотрим, например, в штрихованной системе координат частную производную от ковариантного вектора $A'_i(x')$ по координате $x'^{\,k}$. Учитывая закон преобразования ковариантного вектора (1.6), имеем:

$$\frac{\partial A'_i(x')}{\partial x'^{\,k}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\,k}}\left[\frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,i}} A_m(x(x'))\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,k}\partial x'^{\,i}} A_m(x(x')) + \frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,i}}\frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}}\frac{\partial A_l(x(x'))}{\partial x^n}.$$

Таким образом, частная производная от ковариантного вектора в N-мерном псевдоримановом пространстве является не тензором, а линейным неоднородным геометрическим объектом второго порядка.

Единственным исключением служит частная производная от скаляра, которая преобразуется по закону ко-

вариантного вектора (см. задачу 1 § 2):

$$\frac{\partial S'(x')}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial S}{\partial x^m}.$$

Нетензорность частной производной от тензора в общем случае связана с тем, что определение обычного дифференциала от тензора предполагает вычисление разности значений этого тензора, взятых хотя и в бесконечно близких, но разных точках пространства:

$$dT'^{\,j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_U} = T'^{\,j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_U}(x + dx) - T'^{\,j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_U}(x).$$

Однако при алгебраическом сложении тензоров, взятых в разных точках пространства, результатом в общем случае является нетензорный геометрический объект. Для того, чтобы избежать появления нетензорных выражений при дифференцировании тензоров, давайте переопределим понятие дифференциала и введем в рассмотрение так называемый абсолютный дифференциал тензора, который обладает свойствами тензора. Рассмотрим сначала, для простоты, ковариантный вектор $A_i(x)$.

Абсолютным дифференциалом этого вектора $DA_i(x)$ будем называть главную линейную часть по dx^k разности между вектором $A_i(x + dx)$, взятым в точке $x^k + dx^k$, но параллельно перенесенном в точку x^k, и вектором $A_i(x)$, взятым в точке x^k :

$$DA_i(x) = A_i(x + dx)_{||x} - A_i(x). \tag{5.1}$$

В результате параллельного переноса вектора $A_i(x + dx)$ из точки $x^k + dx^k$ в точку x^k его значение получит некоторое приращение

$$A_i(x + dx)_{||x} = A_i(x + dx) + \delta A_i, \tag{5.2}$$

зависящее, вообще говоря, от векторов A_i, dx^k и от некоторой величины, характеризующей свойства псевдориманова пространства. Эта зависимость должна быть такой, чтобы удовлетворялись следующие условия.

Во-первых, результат параллельного переноса, в силу определения дифференциала, должен быть линейной и однородной формой относительно dx^k.

Во-вторых, приращение суммы двух векторов при параллельном переносе должно быть равно сумме приращений каждого из них при этом переносе. Отсюда следует, что искомое приращение должно быть линейной однородной формой и относительно переносимого вектора.

Вводя обозначение Γ^m_{ik} для геометрического объекта, характеризующего свойства псевдориманова пространства, приращение δA_i запишем в виде:

$$\delta A_i = -\Gamma^m_{ik} dx^k A_m. \tag{5.3}$$

Геометрический объект Γ^m_{ik} в научной литературе получил наименование связности пространства. Учитывая, что $A_i(x+dx) = A_i(x) + dA_i(x)$, из соотношений (5.1) – (5.3) приходим к следующему равенству

$$DA_i(x) = dA_i(x) - \Gamma^m_{ik} dx^k A_m.$$

Записывая выражение для обычного дифференциала в явном виде, из этого равенства получим:

$$DA_i(x) = \left[\frac{\partial A_i(x)}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} A_m\right] dx^k.$$

Так как $DA_i(x)$ и dx^k являются тензорами, то и выражение в квадратных скобках также представляет собой

тензор. Этот тензор называется ковариантной (абсолютной) производной от ковариантного вектора $A_i(x)$ по координате x^k и обозначается $\nabla_k A_i(x)$:

$$\nabla_k A_i(x) = \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} A_m. \tag{5.4}$$

Следует отметить, что в научной литературе используется и другое обозначение для ковариантной производной: $A_i(x)_{;k} \equiv \nabla_k A_i(x)$.

В силу своего определения ковариантная производная удовлетворяет правилу дифференцирования Лейбница:

$$\nabla_k (U \cdot V) = V \nabla_k U + U \nabla_k V. \tag{5.5}$$

Используя выражения (5.4) и (5.5), а также то, что ковариантная производная от скаляра совпадает с частной производной, несложно установить правило составления ковариантной производной от контравариантного вектора B^i.

Для этого продифференцируем по координате x^k скаляр $\Psi = A_i B^i$.

С одной стороны, в силу правила Лейбница будем иметь:

$$\nabla_k \Psi = \nabla_k (A_i B^i) = B^i \nabla_k A_i + A_i \nabla_k B^i.$$

С другой стороны, так как ковариантная производная от скаляра совпадает с частной производной, можем записать:

$$\nabla_k \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} = \frac{\partial (A_i B^i)}{\partial x^k} = B^i \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + A_i \frac{\partial B^i}{\partial x^k}.$$

Сравнивая эти выражения и подставляя в первое из них соотношение (5.4), получим:

$$A_i \nabla_k B^i = A_i \left[\frac{\partial B^i(x)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} B^m \right].$$

Так как тензор A_i полностью произвольный, то

$$\nabla_k B^i = \frac{\partial B^i(x)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} B^m. \tag{5.6}$$

Обобщая выражения (5.4) и (5.6) на случай произвольного U раз ковариантного и M раз контравариантного тензора $T^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_U}$, приходим к следующему правилу ковариантного дифференцирования:

$$\nabla_k T^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_U} = \frac{\partial T^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_U}}{\partial x^k} + \left(\Gamma^{j_1}_{nk} T^{n j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_U} + \right. \tag{5.7}$$

$$\left. + \Gamma^{j_2}_{nk} T^{j_1 n \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_U} + \dots + \Gamma^{j_M}_{nk} T^{j_1 j_2 \dots n}_{i_1 i_2 \dots i_U} \right) - \left(\Gamma^n_{i_1 k} T^{j_1 j_2 \dots j_M}_{n i_2 \dots i_U} + \right.$$

$$\left. + \Gamma^n_{i_2 k} T^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 n \dots i_U} + \dots + \Gamma^n_{i_U k} T^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots n} \right).$$

Изучим теперь основные свойства ковариантного дифференцирования. Выясним прежде всего трансформационные свойства геометрического объекта Γ^i_{km}. Для этого запишем закон преобразования тензора $\nabla_k A_i$:

$$\nabla'_k A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \nabla_j A_m = \tag{5.8}$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \left[\frac{\partial A_m(x)}{\partial x^j} - \Gamma^n_{mj} A_n \right].$$

Преобразуем левую часть этого соотношения. Учитывая определение ковариантной производной (5.4) и правило преобразования (1.6) ковариантного вектора, имеем:

$$\nabla'_k A'_i = \frac{\partial A'_i}{\partial x'^k} - \Gamma'^n_{ki} A'_n = \frac{\partial}{\partial x'^k}\left[\frac{\partial x^m}{\partial x'^i} A_m(x(x'))\right] -$$

$$-\Gamma'^n_{ki}\frac{\partial x^m}{\partial x'^n} A_m(x(x')) = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k \partial x'^i} A_m(x(x')) +$$

$$+\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\frac{\partial A_m(x(x'))}{\partial x^n} - \Gamma'^n_{ki}\frac{\partial x^m}{\partial x'^n} A_m(x(x')).$$

Подставляя это равенство в левую часть соотношения (5.8) и полагая, что все компоненты вектора A_m независимы, получим:

$$\Gamma'^n_{ki}\frac{\partial x^m}{\partial x'^n} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\Gamma^m_{np} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^k \partial x'^i}.$$

Умножая это соотношение на $\partial x'^j/\partial x^m$ и учитывая (1.11), будем иметь:

$$\Gamma'^j_{ki} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\Gamma^m_{np} + \frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^k \partial x'^i}. \qquad (5.9)$$

Таким образом, связность пространства представляет собой линейный неоднородный геометрический объект второго порядка.

В общем случае каждый из индексов связности может независимо принимать N значений: от 1 до N. Таким образом, в N-мерном пространстве связность пространства имеет N^3 компонент.

Введем обозначения:

$$G^j_{ik} = \frac{1}{2}\Big[\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\Big], \tag{5.10}$$

$$S^j_{ik} = \frac{1}{2}\Big[\Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}\Big].$$

Используя обозначения (5.10), связность Γ^j_{ik} можно записать в виде:

$$\Gamma^j_{ik} = G^j_{ik} + S^j_{ik}.$$

В силу такого определения геометрический объект $G^j_{ik} = G^j_{ki}$ будет симметричен относительно перестановки индексов i и k, а геометрический объект $S^j_{ik} = -S^j_{ki}$ – антисимметричен относительно перестановки тех же индексов.

Найдем законы преобразования этих объектов. В штрихованной системе координат имеем:

$$G'^{\,j}_{ik} = \frac{1}{2}\Big[\Gamma'^{\,j}_{ik} + \Gamma'^{\,j}_{ki}\Big].$$

Используя закон преобразования (5.9) связности, приведем это выражение к виду:

$$G'^{\,j}_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m}\Big[\frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}}\frac{\partial x^p}{\partial x'^{\,i}}\Gamma^m_{np} + \frac{\partial x^p}{\partial x'^{\,i}}\frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}}\Gamma^m_{pn} +$$

$$+\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,k}\partial x'^{\,i}} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,i}\partial x'^{\,k}}\Big].$$

Так как для преобразований координат, принадлежащих классу C^p, при $p \geq 2$ смешанные частные производные $\partial^2 x^m/\partial x'^{\,i}\partial x'^{\,k}$ не зависят от порядка их взятия, то

$$\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,i}\partial x'^{\,k}} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,k}\partial x'^{\,i}}. \tag{5.11}$$

В результате будем иметь:

$$G'^{\,j}_{ik} = \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}}\frac{\partial x^p}{\partial x'^{\,i}}\left[\Gamma^m_{np} + \Gamma^m_{pn}\right] + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,k}\partial x'^{\,i}}\right\}.$$

Но в силу первого из определений (5.10), это соотношение можно записать в виде:

$$G'^{\,j}_{ik} = \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}}\frac{\partial x^p}{\partial x'^{\,i}}G^m_{np} + \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,k}\partial x'^{\,i}}. \qquad (5.12)$$

Таким образом, симметричная по индексам i и k часть связности также является линейным неоднородным геометрическим объектом второго порядка.

Запишем теперь выражение для $S'^{\,j}_{ik}$ в штрихованной системе координат:

$$S'^{\,j}_{ik} = \frac{1}{2}\left[\Gamma'^{\,j}_{ik} - \Gamma'^{\,j}_{ki}\right].$$

Используя закон преобразования (5.9) связности, будем иметь:

$$S'^{\,j}_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m}\left[\frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}}\frac{\partial x^p}{\partial x'^{\,i}}S^m_{np} - \frac{\partial x^p}{\partial x'^{\,i}}\frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}}S^m_{pn} + \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,k}\partial x'^{\,i}} - \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^{\,i}\partial x'^{\,k}}\right].$$

Учитывая соотношения (5.10) и (5.11), приведем это равенство к виду:

$$S'^{\,j}_{ik} = \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}}\frac{\partial x^p}{\partial x'^{\,i}}S^m_{np}.$$

Таким образом, антисимметричная по индексам i и k часть связности является тензором. Этот тензор в научной литературе получил название тензора кручения пространства. В большинстве геометрических и физических приложений тензор кручения пространства полагается равным нулю. Поэтому и мы в дальнейшем будем считать, что $S^j_{ik} = 0$, в результате чего связность пространства Γ^j_{ik} будет симметрична по индексам i и k :

$$\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}.$$

Эту связность в научной литературе обычно называют символами Кристоффеля второго рода.

В силу нетензорного закона преобразования (5.12) все компоненты символов Кристоффеля могут быть выбором системы координат обращены в нуль в любой наперед заданной точке произвольного псевдориманова пространства $R^N_{p,N-p}$. Более того, в пространстве без кручения координаты могут быть выбраны так, что все компоненты Γ^m_{nk} будут обращаться в нуль вдоль произвольной кривой.

§ 6. Символы Кристоффеля и их свойства

Найдем выражения для символов Кристоффеля через компоненты метрического тензора. Для этого рассмотрим контравариантный вектор DA^i. Опустим индекс i у этого вектора. В силу общего правила будем иметь:

$$DA_j = g_{ji}DA^i.$$

Но

$$DA_j = D[g_{ji}A^i] = g_{ji}DA^i + A^iDg_{ji}.$$

Сравнивая эти выражения несложно убедиться, что для непротиворечивости операций тензорного анализа, необходимо потребовать выполнения равенства: $Dg_{ji} = 0$. Выражая абсолютный дифференциал через дифференциалы координат, получим: $\nabla_k g_{ji} = 0$. Таким образом, метрический тензор ковариантно постоянен, т.е. при ковариантном дифференцировании ведет себя аналогично постоянной величине при обычном дифференцировании.

Используя это свойство, запишем равенство:

$$\nabla_k g_{ji} + \nabla_j g_{ik} - \nabla_i g_{jk} = 0.$$

В силу определения ковариантной производной от ковариантного тензора второго ранга, будем иметь:

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} -$$

$$-\Gamma^m_{kj} g_{mi} - \Gamma^m_{ki} g_{jm} - \Gamma^m_{ji} g_{mk} - \Gamma^m_{jk} g_{mi} + \Gamma^m_{ij} g_{mk} + \Gamma^m_{ik} g_{jm} = 0.$$

Так как символы Кристоффеля второго рода симметричны по нижним индексам, то учитывая, что и метрический тензор является симметричным, это выражение перепишем в виде:

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 2\Gamma^m_{kj} g_{mi}. \tag{6.1}$$

Выражения $\Gamma_{i,kj} = \Gamma^m_{kj} g_{mi}$ в научной литературе называются символами Кристоффеля первого рода. Умножая равенство $\Gamma^m_{kj} g_{mi} = \Gamma_{i,kj}$ на g^{ni}, несложно установить, что

$$\Gamma^n_{kj} = g^{ni} \Gamma_{i,kj}. \tag{6.2}$$

Из соотношения (6.1) следует, что символы Кристоффеля первого рода непосредственно выражаются через частные производные от метрического тензора:

$$\Gamma_{i,kj} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right]. \tag{6.3}$$

Используя выражения (6.2) и (6.3), имеем окончательно:

$$\Gamma^n_{kj} = \frac{1}{2}g^{ni}\left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right]. \tag{6.4}$$

В различных приложениях помимо символов Кристоффеля второго рода Γ^n_{kj} используются и их свертки Γ^n_{nj} и $g^{kj}\Gamma^n_{kj}$. Найдем компактные выражения для них. В силу определения (6.4) символов Кристоффеля, имеем:

$$\Gamma^n_{nj} = \frac{1}{2}g^{ni}\left[\frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^i}\right].$$

Так как метрический тензор симметричен по своим индексам, то последние два члена в скобке взаимно уничтожаются и мы получим:

$$\Gamma^n_{nj} = \frac{1}{2}g^{ni}\frac{\partial g_{in}}{\partial x^j}.$$

Используя соотношение (3.5), это равенство можно записать в виде:

$$\Gamma^n_{nj} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial \ln\sqrt{|g|}}{\partial x^j} = \frac{\partial \ln\sqrt{(-1)^{N-p}g}}{\partial x^j}. \tag{6.5}$$

В этом соотношении мы учли, что в пространстве $R^N_{p,N-p}$ знак определителя метрического тензора совпадает со знаком $(-1)^{N-p}$, в результате чего $|g| = (-1)^{N-p}g$.

Таким образом, для вычисления выражения Γ^n_{nj} достаточно знать только определитель метрического тензора.

Рассмотрим теперь выражение для $g^{kj}\Gamma^n_{kj}$. В силу определения (6.4), имеем:

$$g^{kj}\Gamma^n_{kj} = \frac{1}{2}g^{ni}g^{kj}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right].$$

Приводя подобные и используя соотношение (3.5), получим:

$$g^{kj}\Gamma^n_{kj} = g^{ni}g^{kj}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2g}g^{ni}\frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Учтем теперь, что

$$g^{ni}g^{kj}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = g^{ni}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[g^{kj}g_{ik}\right] - g^{ni}g_{ik}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^j}.$$

В силу равенств (3.1), (3.6) и (1.9), это выражение принимает вид:

$$g^{ni}g^{kj}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = -\frac{\partial g^{nj}}{\partial x^j}.$$

Следовательно

$$g^{kj}\Gamma^n_{kj} = -\frac{\partial g^{nj}}{\partial x^j} - \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j}g^{nj} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[g^{nj}\sqrt{|g|}\right]. \tag{6.6}$$

Это выражение играет важную роль в теории гравитации.

Задача

Найти выражения для символов Кристоффеля в цилиндрической и сферической системах координат трехмерного евклидова пространства.

Решение. а). Цилиндрические координаты.

Используя результаты задачи 2 § 3, запишем ненулевые компоненты метрического тензора

$$g_{11} = g_{33} = g^{11} = g^{33} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}. \qquad (1)$$

Учитывая, что в цилиндрических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$, из выражения (6.3) можно найти 18 независимых компонент символов Кристоффеля первого рода, которые получаются при пробегании индексами i, k и j значений от 1 до 3 при условии, что $k \leq j$. Подставляя выражение (1) в соотношение (6.3), получим всего две отличные от нуля компоненты символов $\Gamma_{i,kj}$:

$$\Gamma_{1,22} = -r, \quad \Gamma_{2,12} = r.$$

Тогда, в силу определения (6.2), будем иметь:

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}. \qquad (2)$$

б). В сферических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$. Из результатов задачи 2 § 3 следует, что

$$g_{11} = g^{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2\theta, \qquad (3)$$

$$g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}.$$

Поэтому выражение (6.3) дает

$$\Gamma_{1,22} = -r,\ \Gamma_{1,33} = -r\sin^2\theta,\ \Gamma_{2,33} = -r^2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma_{2,12} = r,\ \Gamma_{3,13} = r\sin^2\theta,\ \Gamma_{3,23} = r^2\sin\theta\cos\theta.$$

Используя выражения (3) и определение (6.2), отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля второго рода запишем в виде:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{4}$$

§ 7. Основные свойства ковариантного дифференцирования

Используя выражения (6.4) – (6.6), найдем соотношения для некоторых важных случаев ковариантного дифференцирования тензоров.

Найдем ковариантную дивергенцию от некоторого контравариантного вектора A^i :

$$\nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} A^k.$$

Учитывая соотношение (6.5), получим:

$$\nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i} A^i.$$

Несложно убедиться, что правую часть этого равенства можно записать в виде:

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{|g|}A^i\right]. \tag{7.1}$$

Таким образом, для построения ковариантной дивергенции от контравариантного вектора вычислять символы Кристоффеля не требуется.

Рассмотрим теперь ковариантную дивергенцию от антисимметричного тензора $F^{ik} = -F^{ki}$:

$$\nabla_i F^{ik} = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij} F^{jk} + \Gamma^k_{ij} F^{ij}. \tag{7.2}$$

Так как символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, а тензор F^{ij} – антисимметричен по индексам i и j, то $\Gamma^k_{ij} F^{ij} = 0$. Тогда, используя соотношение (6.5), выражение (7.2) несложно привести к виду:

$$\nabla_i F^{ik} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{|g|} F^{ik} \right].$$

Совершенно аналогично можно доказать, что ковариантная дивергенция от абсолютно антисимметричного тензора M-го ранга ($M \leq N$)

$$F^{i_1 i_2 \ldots i_M} = -F^{i_2 i_1 \ldots i_M} = -F^{i_1 i_2 \ldots i_{p+1} i_p \ldots i_M}$$

может быть представлена в виде:

$$\nabla_k F^{i_1 i_2 \ldots i_{M-1} k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\sqrt{|g|} F^{i_1 i_2 \ldots i_{M-1} k} \right].$$

Найдем теперь результат альтернирования индекса ковариантной производной с индексом ковариантного вектора. В силу правила составления ковариантных производных имеем:

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \Gamma^j_{ik} A_j - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \Gamma^j_{ki} A_j.$$

Учитывая, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, получим:

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

Таким образом, для вычисления и этого выражения символы Кристоффеля не требуются. Этот результат можно записать компактнее, если использовать принятое обозначение для операции альтернирования индексов:

$$\nabla_{[i} A_{k]} = \frac{\partial}{\partial x^{[i}} A_{k]}.$$

Рассмотрим абсолютно антисимметричный ковариантный тензор M-го ранга, полагая, что $M \leq N$:

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_M} = -F_{i_2 i_1 \ldots i_M} = -F_{i_1 i_2 \ldots i_{p+1} i_p \ldots i_M}.$$

Совершенно аналогично можно доказать, что для этого тензора выполняется соотношение:

$$\nabla_{[k} F_{i_1 i_2 \ldots i_M]} = \frac{\partial}{\partial x^{[k}} F_{i_1 i_2 \ldots i_M]}.$$

При проведении вычислений часто возникает необходимость изменить порядок следования двух ковариантных производных. Однако такая перестановка в случае произвольного риманова пространства сопровождается появлением в преобразуемом выражении дополнительных членов.

Пусть, например, нам необходимо изменить порядок следования ковариантных производных в выражении

$\nabla_i \nabla_k B^n$. Это проще всего осуществить, составив выражение $\nabla_i \nabla_k B^n - \nabla_k \nabla_i B^n$. Используя правила ковариантного дифференцирования, после несложных, но громоздких вычислений будем иметь:

$$\nabla_i \nabla_k B^n - \nabla_k \nabla_i B^n = \frac{\partial^2 B^n}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 B^n}{\partial x^k \partial x^i} +$$

$$+ B^j \left\{ \frac{\partial \Gamma^n_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^n_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^n_{im} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^n_{km} \Gamma^m_{ji} \right\}.$$

Учитывая, что для дважды дифференцируемых функций

$$\frac{\partial^2 B^n}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 B^n}{\partial x^k \partial x^i}$$

и вводя обозначение

$$R^n_{jik} = \frac{\partial \Gamma^n_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^n_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^n_{im} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^n_{km} \Gamma^m_{ji}, \tag{7.3}$$

это выражение запишем в виде

$$\nabla_i \nabla_k B^n - \nabla_k \nabla_i B^n = B^j R^n_{jik}. \tag{7.4}$$

Так как левая часть этого равенства является тензором и B^j также тензор, то и геометрический объект R^n_{jik} обязан быть тензором.

Этот тензор называется тензором кривизны пространства или тензором Римана – Кристоффеля. Тензор кривизны пространства также возникает и при перестановке ковариантных производных, действующих на ковариантный вектор:

$$\nabla_i \nabla_k B_n - \nabla_k \nabla_i B_n = -B_j R^j_{nik}. \tag{7.5}$$

Выражения (7.4) и (7.5) легко обобщаются на случай произвольного M раз контравариантного и U раз ковариантного тензора $T^{n_1 n_2 \ldots n_M}_{j_1 j_2 \ldots j_U}$:

$$\nabla_i \nabla_k T^{n_1 n_2 \ldots n_M}_{j_1 j_2 \ldots j_U} - \nabla_k \nabla_i T^{n_1 n_2 \ldots n_M}_{j_1 j_2 \ldots j_U} = \Big(T^{p n_2 \ldots n_M}_{j_1 j_2 \ldots j_U} R^{n_1}_{pik} +$$

$$+ T^{n_1 p \ldots n_M}_{j_1 j_2 \ldots j_U} R^{n_2}_{pik} + \cdots + T^{n_1 n_2 \ldots p}_{j_1 j_2 \ldots p} R^{n_M}_{pik} \Big) - \Big(T^{n_1 n_2 \ldots n_M}_{p j_2 \ldots j_U} R^{p}_{j_1 ik} +$$

$$+ T^{n_1 n_2 \ldots n_M}_{j_1 p \ldots j_U} R^{p}_{j_2 ik} + \cdots + T^{n_1 n_2 \ldots n_M}_{j_1 j_2 \ldots p} R^{p}_{j_U ik} \Big).$$

Совершенно аналогичное выражение справедливо и для перестановки ковариантных производных от аксиального тензора.

§ 8. Тензор кривизны Римана – Кристоффеля и его свойства

Тензор кривизны Римана – Кристоффеля является важнейшим геометрическим объектом в римановых пространствах. Поэтому давайте изучим его свойства подробнее. Для этого опустим в выражении (7.3) индекс n и преобразуем после этого его к виду:

$$R_{npik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^i \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{ni}}{\partial x^k \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^n \partial x^i}\right] + \tag{8.1}$$

$$+ g_{mj}[\Gamma^m_{ip}\Gamma^j_{kn} - \Gamma^m_{kp}\Gamma^j_{ni}].$$

Так как у этого тензора имеется четыре ковариантных индекса, то он имеет N^4 компонент. Однако не все из них являются независимыми, так как по своей математической конструкции тензор кривизны обладает определенными свойствами симметрии и антисимметрии относительно операции перестановки индексов.

Из выражения (8.1) несложно непосредственно установить, что тензор кривизны антисимметричен относительно перестановки индексов в каждой из пар индексов np и ik :

$$R_{npik} = -R_{pnik} = -R_{npki} = R_{pnki}. \tag{8.2}$$

Кроме того, этот тензор симметричен по отношению к перестановке этих пар индексов друг с другом:

$$R_{npik} = R_{iknp}. \tag{8.3}$$

Далее, в силу математической конструкции, результат альтернирования по любым трем индексам тензора кривизны равен нулю:

$$R_{n[pik]} = \frac{1}{3!}[R_{npik} + R_{nikp} + R_{nkpi}] = 0. \tag{8.4}$$

И, наконец, тензор кривизны удовлетворяет дифференциальному тождеству Бианки – Падовой:

$$\nabla_{[j}R_{|np|ik]} = \frac{1}{3!}[\nabla_j R_{npik} + \nabla_i R_{npkj} + \nabla_k R_{npji}] = 0. \tag{8.5}$$

В силу соотношений (8.2) – (8.5) количество независимых компонент тензора кривизны оказывается значительно меньше, чем N^4. Несложный расчет показывает, что независимыми являются $K = N^2(N^2-1)/12$ компонент тензора кривизны, остальные могут быть линейно выражены через них.

Из тензора кривизны четвертого ранга R_{iknm} можно путем поднятия его индексов и их свертки образовать

тензор второго ранга и скаляр. Несложно показать, что в силу свойств симметрии тензора R_{iknm} относительно перестановки его индексов, нетривиальный тензор второго ранга R_{km} может быть образован только один, после свертки индексов, взятых по одному из первой и второй пар $R_{km} = g^{in} R_{iknm}$:

$$R_{km} = \frac{\partial \Gamma^n_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma^n_{kn}}{\partial x^m} + \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{kp}\Gamma^p_{mn}. \qquad (8.6)$$

Этот тензор в научной литературе получил наименования тензора Риччи. Тензор Риччи в силу свойства (8.2) тензора кривизны симметричен: $R_{km} = R_{mk}$. Поэтому в N-мерном пространстве он имеет $N(N+1)/2$ независимых компонент. И, наконец, сворачивая индексы у тензора Риччи, получим скаляр – так называемую скалярную кривизну пространства R :

$$R = g^{km} R_{km}. \qquad (8.7)$$

Следует отметить, что линейная комбинация $R^i_k - \delta^i_k R/2$ тензора Риччи и скалярной кривизны представляет собой левую часть уравнений гравитационного поля в общей теории относительности Эйнштейна. В силу тождеств Бианки – Падовой эта комбинация удовлетворяет дифференциальному соотношению: $\nabla_i [R^i_k - \delta^i_k R/2] = 0$.

Среди псевдоримановых пространств выделенное положение занимают так называемые пространства постоянной кривизны. В этих пространствах тензор кривизны имеет вид:

$$R_{iknm} = \frac{R}{N(N-1)} [g_{in} g_{km} - g_{im} g_{kn}], \qquad (8.8)$$

причем скалярная кривизна R не зависит от координат.

Сворачивая в выражении (8.8) индексы i и n, найдем, что в пространствах постоянной кривизны тензор Риччи пропорционален метрическому тензору: $R_{km} = Rg_{km}/N$.

В зависимости от знака скалярной кривизны возможны следующие три типа пространств постоянной кривизны. При $R < 0$ пространство называется пространством Лобачевского (пространством постоянной отрицательной кривизны или гиперболическим пространством). При $R = 0$ тензор кривизны тождественно равен нулю и мы имеем евклидово или псевдоевклидово пространство. Это пространство часто еще называют плоским. При $R > 0$ пространство называется пространством Римана (пространством постоянной положительной кривизны или эллиптическим пространством).

Первые два типа пространств постоянной кривизны являются бесконечными, имеющими бесконечный объем и не имеющими границ. Эллиптическое же пространство имеет конечный объем, хотя оно также не имеет границ.

В псевдоевклидовом пространстве $E^N_{p,N-p}$ может быть введена глобальная система координат, в которой

$$g_{km} = \operatorname{diag}\,(\underbrace{+1, +1, \ldots}_{p}, \underbrace{-1, -1, \ldots}_{N-p}) \tag{8.9}$$

сразу во всех точках пространства.

Следуя терминологии книги [6], эту систему координат назовем галилеевской, а значения метрического тензора в ней – галилеевскими значениями. Метрический тензор g_{ik}, имеющий вид (8.9), в научной литературе получил наименование галилеевского метрического тензора и особое обозначение $g_{ik} = \eta_{ik}$.

В псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ тензор кривизны не равен нулю, поэтому не существует глобальной системы координат, в которой метрика была бы приведена к диагональному виду глобально, т.е. сразу во всех точках пространства [7].

Однако в любой наперед заданной точке пространства метрический тензор неособенными преобразованиями координат можно [7] привести к диагональному виду, причем

$$\operatorname{diag} g_{ik} = \{\underbrace{+1, +1, ..., +1}_{p}, \underbrace{-1, -1, ..., -1}_{N-p}\}.$$

§ 9. Свойства тензора кривизны в пространствах с небольшим числом измерений

Изучим теперь алгебраические свойства тензора кривизны для случая пространств небольшого числа измерений: $N = 1, 2, 3, 4$.

При $N = 1$ пространство одномерно. Примером одномерного пространства может служить линия. В случае одномерного пространства каждый из индексов тензора кривизны может принимать только одно значение и он имеет только одну компоненту R_{1111}. Так как тензор кривизны для пространств любых размерностей должен удовлетворять условиям антисимметрии (8.2) относительно операции перестановки индексов, то отсюда следует, что в одномерном пространстве тензор кривизны тождественно равен нулю. Поэтому одномерное пространство с необходимостью является евклидовым.

При $N = 2$ тензорные индексы могут принимать два значения. Обозначая их 1 и 2, несложно убедиться, что в

двумерном пространстве тензор кривизны имеет только одну независимую компоненту R_{1212}. Примером двумерного пространства служит поверхность. Метрический тензор в этом случае имеет три независимых компоненты: g_{11}, g_{22}, g_{12}. Однако в любом двумерном пространстве тензор кривизны может быть выражен через скалярную кривизну и метрический тензор. Найдем эту зависимость. Для этого выразим скалярную кривизну через тензор кривизны: $R = R_{iknm}g^{in}g^{km}$. Раскрывая суммирование в правой части этого соотношения и используя свойства (8.2) – (8.4) тензора кривизны, получим:

$$R = R_{1212}[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2]. \tag{9.1}$$

Учтем теперь, что в двумерном пространстве

$$g^{11}g^{22} - (g^{12})^2 = \frac{1}{g}, \quad g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2.$$

Тогда из выражения (9.1) следует, что

$$R_{1212} = \frac{R}{2}[g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}].$$

Так как в двумерном пространстве независимой является только одна компонента R_{1212}, то это соотношение мы можем записать в виде:

$$R_{iknm} = \frac{R}{2}[g_{in}g_{km} - g_{im}g_{kn}].$$

Поэтому, если $R = const$, то двумерное пространство является пространством постоянной кривизны.

В трехмерном пространстве тензор кривизны, в соответствии с общей формулой (8.1), имеет шесть независимых компонент. Также по шесть независимых компонент имеют в трехмерном пространстве тензор Риччи R_{ik} и метрический тензор g_{ik}. Отсюда следует, что тензор кривизны в этом случае может быть выражен через тензор Риччи R_{ik}, скалярную кривизну R и метрический тензор g_{ik}.

Найдем эту зависимость. Для этого составим выражение из перечисленных выше тензоров так, чтобы оно было линейно относительно тензора Риччи и его свертки $R = R^i_i$ и обладало всеми свойствами (8.2) – (8.4) тензора кривизны относительно операции перестановки индексов. Такое выражение должно иметь вид:

$$R_{ijkm} = a[R_{ik}g_{jm} + R_{jm}g_{ik} - R_{jk}g_{im} - R_{im}g_{jk}] + \\ + bR[g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}], \tag{9.2}$$

где a и b – некоторые числовые константы.

Свернем в этом выражении индексы i и k. Учитывая, что в трехмерном пространстве $g_{ik}g^{ik} = 3$, получим:

$$R_{jm} = aR_{jm} + (a + 2b)Rg_{jm}. \tag{9.3}$$

Сворачивая индексы j и m, будем иметь: $R = (4a + 6b)R$. Так как в общем случае $R \neq 0$, то $b = (1 - 4a)/6$. Тогда выражение (9.3) принимает вид:

$$(1 - a)R_{jm} = \frac{(1 - a)}{3}g_{jm}R. \tag{9.4}$$

Для трехмерного пространства постоянной кривизны, в силу определения (8.6), $R_{jm} = Rg_{jm}/3$ и это соотношение

выполняется при любом значении a. Для произвольного же трехмерного пространства $R_{jm} \neq Rg_{jm}/3$ и соотношение (9.4) будет удовлетворяться тождественно, если и только если $a = 1$. Тогда из выражения (9.3) следует, что $b = -1/2$ и соотношение (9.2) дает:

$$R_{ijkm} = R_{ik}g_{jm} + R_{jm}g_{ik} - R_{jk}g_{im} - R_{im}g_{jk} -$$

$$-\frac{R}{2}[g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}].$$

И, наконец, в четырехмерном пространстве тензор кривизны имеет двадцать независимых компонент, в то время как тензор Риччи и метрический тензор имеют только по десять независимых компонент. Поэтому в четырехмерном пространстве тензор кривизны, в общем случае произвольной римановой геометрии, уже не может быть представлен в виде алгебраической комбинации тензора Риччи, скалярной кривизны и метрического тензора.

ГЛАВА 3
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА В N-МЕРНОМ ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим произвольное N-мерное псевдориманово пространство $R^N_{p,N-p}$. Метрический тензор этого пространства, как и ранее, будем обозначать g_{ik}.

Пусть в пространстве $R^N_{p,N-p}$ задан некоторый ковариантный тензор второго ранга $\Psi_{km}(x)$, зависящий от координат $x^i = \{x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^N\}$.

Назовем s-ой степенью данного тензора, где s – целое неотрицательное число, тензор $\Psi^{(s)}_{km}(x) \equiv \Psi_{(s)km}(x)$, построенный из произведения s тензоров Ψ_{ij}, индексы которых свернуты метрическим тензором g^{ij} пространства $R^N_{p,N-p}$ по правилу:

$$\Psi^{(s)}_{km} = \Psi_{kj_1} g^{j_1 i_1} \Psi_{i_1 j_2} g^{j_2 i_2} \ldots g^{j_{s-1} i_{s-1}} \Psi_{i_{s-1} m}. \qquad (III.1)$$

Сворачивая оставшиеся индексы в этом выражении, получим инвариант s-ой степени этого тензора: $\Psi_{(s)} \equiv \Psi^{(s)} = \Psi^{(s)}_{km} g^{km}$.

При $s = 0$ в соответствии с этим определением будем полагать $\Psi^{(0)}_{ik} = g_{ik}$, в результате чего инвариант нулевой степени любого тензора второго ранга совпадает с размерностью пространства: $\Psi_{(s)} = N$.

Используя эти определения, установим ряд тензорных соотношений, которым удовлетворяют степени тензора второго ранга и их инварианты в пространстве $R^N_{p,N-p}$.

§ 10. Доказательство основных лемм

Докажем сначала несколько лемм наиболее важных для наших целей, относящихся к произведениям тензоров Леви-Чивита.

Лемма 10.1. В произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ справедливо тензорное соотношение:

$$E^{i_1 i_2 \dots i_N} E_{j_1 j_2 \dots j_N} = (-1)^{N-p} \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \delta^{i_1}_{j_2} & \dots & \delta^{i_1}_{j_N} \\ \delta^{i_2}_{j_1} & \delta^{i_2}_{j_2} & \dots & \delta^{i_2}_{j_N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \delta^{i_N}_{j_1} & \delta^{i_N}_{j_2} & \dots & \delta^{i_N}_{j_N} \end{vmatrix}. \tag{10.1}$$

Доказательство. В левой части соотношения (10.1) стоит произведение двух аксиальных тензоров Леви-Чивита. Эти тензоры обладают свойством абсолютной антисимметрии относительно перестановки их индексов. Докажем сначала, что и правая часть соотношения (10.1) также абсолютно антисимметрична относительно операции перестановки любых двух ковариантных или контравариантных индексов.

Совершим перестановку каких-либо двух одноименных индексов (например, i_r и i_k или j_p и j_q). В правой части соотношения (10.1) перестановка двух контравариантных индексов i_r и i_k соответствует перестановке r-ой и k-ой строк определителя, а перестановка двух ковариантных индексов j_p и j_q – перестановке p-го и q-го столбцов определителя. Так как перестановка двух строк

или двух столбцов определителя изменяет его знак, то тензор, стоящий в правой части соотношения (10.1), действительно является абсолютно антисимметричным относительно операции перестановки любых двух ковариантных или контравариантных индексов.

Таким образом, тензоры, стоящие в обеих частях равенства (10.1), являются абсолютно антисимметричными. Поэтому соотношение (10.1) будет нетривиальным, если и только если все N индексов в каждой из двух групп $i_1 i_2 \ldots i_N$ и $j_1 j_2 \ldots j_N$ будут разными.

Рассмотрим один из таких наборов значений индексов:

$$i_1 = 1,\ i_2 = 2, \ldots, i_N = N, \quad j_1 = 1, \ldots, j_N = N. \quad (10.2)$$

Подставим эти значения в соотношение (10.1). В силу определений (4.4) и (4.5) аксиального тензора Леви-Чивита и тензора Кронекера (1.9), это соотношение примет вид:

$$(-1)^{N-p} e^{12\ldots N} e_{12\ldots N} = (-1)^{N-p} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Так как $e^{12\ldots N} = e_{12\ldots N} = 1$, то убеждаемся, что при частном выборе (10.2) индексов соотношение (10.1) превращается в тождество: $(-1)^{N-p} = (-1)^{N-p}$.

Другие наборы значений индексов, при которых соотношение (10.1) является нетривиальным, получаются из набора (10.2) различными перестановками. Так как обе части соотношения (10.1) обладают одинаковыми

свойствами абсолютной антисимметрии относительно операции перестановки одноименных индексов, то следовательно, соотношение (10.1) будет выполняться и при любом другом выборе индексов. Лемма доказана.

Следствие 10.1. В произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ справедливо тензорное соотношение:

$$E^{i_1 i_2 .. i_N} E^{j_1 j_2 ... j_N} = (-1)^{(N-p)} \begin{vmatrix} g^{i_1 j_1} & g^{i_1 j_2} & ... & g^{i_1 j_N} \\ g^{i_2 j_1} & g^{i_2 j_2} & ... & g^{i_2 j_N} \\ . & . & ... & . \\ g^{i_N j_1} & g^{i_N j_2} & ... & g^{i_N j_N} \end{vmatrix}. \tag{10.3}$$

Аналогичное соотношение имеет место и для тензоров с ковариантными индексами.

Лемма 10.2. Свертка $N-1$ индексов ковариантного тензора Леви-Чивита с соответствующими индексами контравариантного тензора Леви-Чивита в произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ дает:

$$E^{i_1 i_2 ... i_{N-1} a} E_{i_1 i_2 ... i_{N-1} b} = (-1)^{(N-p)} (N-1)! \delta^a_b. \tag{10.4}$$

Доказательство. Используя определения (4.4) и (4.5), приведем соотношение (10.4) к виду:

$$e^{i_1 i_2 ... i_{N-1} a} e_{i_1 i_2 ... i_{N-1} b} = (N-1)! \delta^a_b. \tag{10.5}$$

Рассмотрим два случая:

1). Пусть $a \neq b$. Очевидно, что в правой части получается нуль. Покажем, что в левой части тоже будет нуль, так как либо a, либо b совпадет со значением одного из индексов $i_1, i_2, ..., i_{N-1}$, в результате чего один из

символов Леви-Чивита обратится в нуль. Не ограничивая общности, будем считать, что $a = N$, $b = N-1$ (если это не так, то производя перенумерацию осей координат N-мерного пространства, этого всегда можно добиться). Тогда для того, чтобы первый сомножитель $e^{i_1 i_2 \ldots i_{N-1} a}$ при $a = N$ в левой части не был равен нулю, необходимо, чтобы ни один из индексов i_1, $i_2, \ldots, i_{N-1}$ не был равен N. Следовательно, индексы могут принимать значения только от 1 до $N-1$, а так как число индексов равно $N-1$, то какой-либо из индексов обязан быть равным значению $N-1$. Но тогда второй сомножитель $e_{i_1 i_2 \ldots i_{N-1} b}$ при $b = N-1$ в левой части будет иметь два одинаковых индекса. Следовательно, этот второй сомножитель будет равен нулю.

2). Пусть $a = b$. Не ограничивая общности, будем считать, что $a = b = N$. Тогда в левой части индексы i_1, $i_2, \ldots, i_{N-1}$ могут принимать значения только от 1 до $N-1$ и, следовательно, в левой части (10.5) будут стоять произведения вида $e^{12\ldots N-1N} e_{12\ldots N-1N}$ и всевозможные перестановки из первых $N-1$ индексов. Так как число перестановок из $N-1$ элементов равно $(N-1)!$, то сумма в левой части будет содержать $(N-1)!$ слагаемых. Каждое из этих слагаемых четным числом перестановок индексов может быть приведено к виду $e^{12\ldots N-1N} e_{12\ldots N-1N}$. В результате соотношение (10.5) при $a = b$ примет вид:

$$(N-1)! e^{12\ldots N} e_{12\ldots N} = (N-1)!$$

Поскольку $e^{12\ldots N-1N} = e_{12\ldots N-1N} = 1$, то это равенство выполняется тождественно. Таким образом, соотношение (10.4) доказано.

Лемма 10.3. В произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ справедливо тензорное соотношение:

$$E^{i_1 i_2 \dots i_N} \Psi^{j_1}_{i_1} \Psi^{j_2}_{i_2} \dots \Psi^{j_N}_{i_N} = E^{j_1 j_2 \dots j_N} \det ||\Psi^j_i||, \qquad (10.6)$$

где матрица $||\Psi^j_i||$ составлена из компонент тензора Ψ^j_i, причем нижний индекс нумерует строки, а верхний – ее столбцы.

Доказательство. Установим сначала, что правая и левая части доказываемого равенства (10.6) обладают одинаковыми свойствами относительно перестановки индексов j.

Допустим, что любые два индекса совпадают ($j_r = j_k$), тогда справа очевиден нуль. Для того чтобы убедиться, что и в левой части равенства тоже будет нуль, переобозначим индексы $i_r \leftrightarrow i_k$ в левой части. Тогда получим при $j_k = j_r = j$:

$$E^{i_1 i_2 \dots i_r \dots i_k \dots i_N} \Psi^{j_1}_{i_1} \Psi^{j_2}_{i_2} \dots \Psi^{j}_{i_r} \dots \Psi^{j}_{i_k} \dots \Psi^{j_N}_{i_N} =$$

$$= E^{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_r \dots i_N} \Psi^{j_1}_{i_1} \Psi^{j_2}_{i_2} \dots \Psi^{j}_{i_k} \dots \Psi^{j}_{i_r} \dots \Psi^{j_N}_{i_N} =$$

$$= -E^{i_1 i_2 \dots i_r \dots i_k \dots i_N} \Psi^{j_1}_{i_1} \Psi^{j_2}_{i_2} \dots \Psi^{j}_{i_r} \dots \Psi^{j}_{i_k} \dots \Psi^{j_N}_{i_N}.$$

Отсюда следует, что в левой части тоже получается нуль.

Докажем, что перестановка местами любых двух индексов j_r и j_k приводит к изменению знака в обоих частях соотношения (10.6). В правой части изменение знака при перестановке индексов очевидно. В левой части изменение знака можно увидеть, если воспользоваться переобозначением индексов $i_r \leftrightarrow i_k$. Следовательно перестановочные свойства и свойства абсолютной антисимметрии

по свободным индексам j_1, j_2, ..., j_N обоих частей соотношения (10.6) одинаковы.

Докажем теперь, что это равенство выполняется при частном выборе индексов $j_1 = 1$, $j_2 = 2, \ldots$, $j_N = N$. Тогда в силу одинаковых свойств антисимметрии относительно перестановки индексов это равенство будет справедливым и при любом выборе индексов.

Подставляя $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_N = N$ в соотношение (10.6), учитывая равенство (4.4), получим:

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_N} \Psi^1_{i_1} \Psi^2_{i_2} \ldots \Psi^N_{i_N} = e^{12\ldots N} \det ||\Psi^i_j|| = \det ||\Psi^i_j||.$$

Левая часть этого равенства, по определению (4.2), представляет собой выражение определителя матрицы $||\Psi^i_j||$ непосредственно через его элементы. Таким образом, при $i_1 = 1, \ldots, i_N = N$ из соотношения (10.6) получаем $\det ||\Psi^i_j|| = \det ||\Psi^i_j||$. Лемма доказана.

§ 11. Теоремы о тензорных соотношениях

Теорема 11.1. N-ая степень произвольного тензора второго ранга Ψ_{km} в N-мерном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ является линейной комбинацией низших степеней этого же тензора:

$$\Psi^{(N)}_{km} = -\frac{1}{Y^{(0)}} \sum_{s=1}^{N} \Psi^{(N-s)}_{km} Y^{(s)}, \tag{11.1}$$

где $Y^{(s)}$ – определяются рекуррентным уравнением:

$$Y^{(s)} = -\frac{1}{s} \sum_{t=0}^{s-1} \Psi^{(s-t)} Y^{(t)}, \quad s \geq 1, \tag{11.2}$$

а $Y^{(0)}$ – любое, не равное нулю, число.

Доказательство. Построим вспомогательный тензор:

$$\Phi^a_b(N) = (-1)^{(N-p)} E^{j_1 j_2 \dots j_{N-1} a} \times \tag{11.3}$$

$$\times E^{i_1 i_2 \dots i_{N-1} i_N} \Psi_{i_1 j_1} \Psi_{i_2 j_2} \dots \Psi_{i_N b}.$$

Правая часть соотношения (11.3) может быть вычислена двумя путями. С одной стороны, записывая его в виде

$$\Phi^a_b(N) = (-1)^{(N-p)} E^{j_1 j_2 \dots j_{N-1} a} g_{j_1 k_1} \times$$

$$\times g_{j_2 k_2} \cdots g_{j_{N-1} k_{N-1}} g_{j_N b} E^{i_1 i_2 \dots i_{N-1} i_N} \Psi^{k_1}_{i_1} \Psi^{k_2}_{i_2} \dots \Psi^{k_{N-1}}_{i_{N-1}} \Psi^{k_N}_{i_N}$$

и учитывая соотношение (10.6), будем иметь:

$$\Phi^a_b(N) = (-1)^{(N-p)} E^{j_1 j_2 \dots j_{N-1} a} E_{j_1 j_2 \dots j_{N-1} b} \; det||\Psi^j_i||.$$

Тогда в силу соотношения (10.4) это равенство можно представить в виде:

$$\Phi^a_b(N) = (N-1)! \delta^a_b \det \; ||\Psi^i_j||. \tag{11.4}$$

С другой стороны, используя первое из соотношений (10.3) и умножая последовательно каждый из тензоров Ψ_{ij} на соответствующий столбец, из выражения (11.3) будем иметь:

$$\Phi^a_b(N) = \begin{vmatrix} \Psi^{(1)} & \Psi^{j_1}_{j_2} & \dots & \Psi^{j_1}_{j_{N-1}} & \Psi^{j_1}_{b} \\ \Psi^{j_2}_{j_1} & \Psi^{(1)} & \dots & \Psi^{j_2}_{j_{N-1}} & \Psi^{j_2}_{b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi^{j_{N-1}}_{j_1} & \Psi^{j_{N-1}}_{j_2} & \dots & \Psi^{(1)} & \Psi^{j_{N-1}}_{b} \\ \Psi^{a}_{j_1} & \Psi^{a}_{j_2} & \dots & \Psi^{a}_{j_{N-1}} & \Psi^{a}_{b} \end{vmatrix}. \tag{11.5}$$

Рассмотрим полученный определитель. Раскроем его по последней строке:

$$\Phi^a_b(N) = (-1)^{N+1}[\Psi^a_{j_1} M(a, j_1) - \Psi^a_{j_2} M(a, j_2) + \dots \quad (11.6)$$

$$\dots + (-1)^{N-2}\Psi^a_{j_{N-1}} M(a, j_{N-1}) + (-1)^{N-1}\Psi^a_b \Phi(N-1)],$$

где $M(a, j_1)$, $M(a, j_2)$,..., $M(a, j_{N-1})$, $\Phi(N-1)$ – миноры к соответствующим элементам последней строки (здесь учтено, что последний минор в силу выражения (11.5) представляет из себя $\Phi^a_b(N-1) = \Phi(N-1)$).

Заметим, что

$$\Psi^a_{j_1} M(a, j_1) = -\Psi^a_{j_2} M(a, j_2) = \Psi^a_{j_3} M(a, j_3) = \dots =$$

$$= (-1)^N \Psi^a_{j_{N-1}} M(a, j_{N-1}).$$

Для доказательства первого из этих равенств достаточно в миноре $M(a, j_2)$ поменять местами первую и вторую строки, после чего произвести взаимное изменение немых индексов (т.е. индексов, по которым идет суммирование по всей совокупности принимаемых ими значений) $j_1 \leftrightarrow j_2$ в выражении $\Psi^a_{j_2} M(a, j_2)$. Другие соотношения доказываются аналогично. Следовательно, выражение (11.6) принимает вид:

$$\Phi^a_b(N) = [(-1)^{N+1}(N-1)\Psi^a_{j_1} M(a, j_1) + \Psi^a_b \Phi(N-1)]. \quad (11.7)$$

Рассмотрим теперь тензор $\Psi^a_{j_1} M(a, j_1)$, сделав его первую строку последней. Затем произведем следующую замену немых индексов $j_1 \to c$, $j_2 \to j_1$, $\dots$, $j_{N-1} \to j_{N-2}$ и сравним полученное выражение с определителем (11.5).

Проделанные операции позволяют утверждать, что равенство (11.7) можно переписать в виде:

$$\Phi^a_b(N) = -(N-1)\Psi^a_c\Phi^c_b(N-1) + \Psi^a_b\Phi(N-1). \quad (11.8)$$

Свернем индексы в этом соотношении:

$$\Phi(N) = -(N-1)\Psi^a_c\Phi^c_a(N-1) + \Psi^{(1)}\Phi(N-1). \quad (11.9)$$

Так как $\Phi^a_b(N)$ – это определитель N-го порядка, элементами которого является тензор Ψ^i_j, то разложение этого определителя должно представлять собой разложение по степеням тензора Ψ^i_j от 1 до N с коэффициентами, зависящими от N и показателя степени s тензора Ψ^i_j.

Поэтому решения рекуррентных уравнений (11.8), (11.9) следует искать в виде

$$\Phi^a_b(N) = \sum_{s=1}^{N} \Psi^{(s)a}_b Y^{(N-s)} f(s,N), \quad (11.10)$$

где $Y^{(N-s)}$ – некоторая скалярная и однородная относительно Ψ^i_j функция степени $N-s$, $f(s,N)$ – некоторая функция, зависящая только от s и N.

Найдем эти функции. Подставим выражение (11.10) в выражение (11.8), преобразовав его правую часть:

$$\sum_{s=1}^{N} \Psi^{(s)a}_b Y^{(N-s)} f(s,N) = \Psi^a_b\Phi(N-1) -$$

$$-(N-1)\sum_{s=1}^{N-1} \Psi^{(s+1)a}_b Y^{(N-s-1)} f(s,N-1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях тензора Ψ^a_b в данном равенстве. В результате получим:

$$Y^{N-1} f(1, N) = \Phi(N-1), \tag{11.11}$$

$$f(m, N) = -(N-1) f(m-1, N-1), \quad m \geq 2. \tag{11.12}$$

Из уравнения (11.12) следует, что функция f не зависит от m, поэтому, опуская у нее несущественные аргументы m и $m-1$, будем иметь: $f(N) = -(N-1) f(N-1)$. Для решения этого рекуррентного уравнения перепишем его в виде:

$$\frac{1}{f(n+1)} = \frac{n+1}{f(n+2)}. \tag{11.13}$$

Построим производящую функцию

$$h(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{f(n+1)}. \tag{11.14}$$

Уравнение (11.13) может быть получено после подстановки производящей функции в дифференциальное уравнение

$$\frac{dh}{d\xi} = -h$$

и разложения этого дифференциального уравнения в ряд по степеням ξ.

Как известно, решение этого уравнения записывается в виде: $ch = \exp(-\xi)$, где c – произвольная константа. Разложим полученную функцию в бесконечный ряд по степеням ξ и сравним его коэффициенты с коэффициентами выражения (11.14), стоящими при одинаковых степенях ξ. В результате получим: $f(n) = (-1)^{n-1} c\Gamma(n)$.

Выбор различных значений постоянной интегрирования c с точки зрения выражения (11.10) соответствует переопределению скалярной функции $Y^{(N-1)}$ путем деления ее на c.

Поэтому, не ограничивая общности, мы можем положить $c = 1$. В результате выражение (11.10) примет вид:

$$\Phi^a_b(N) = (-1)^{(N-1)}\Gamma(N)\sum_{s=1}^{N}\Psi^{(s)a}_b Y^{(N-s)}. \qquad (11.15)$$

Вернемся к соотношению (11.11). После учета явного вида функции f будем иметь:

$$(-1)^{(N-1)}\Gamma(N)Y^{(N-1)} = \Phi(N-1). \qquad (11.16)$$

Изменим теперь в выражении (11.15) индекс суммирования s на t, так, чтобы $s = N - t$:

$$\Phi^a_b(N) = (-1)^{(N-1)}\Gamma(N)\sum_{t=0}^{N-1}\Psi^{(N-t)a}_b Y^{(t)}. \qquad (11.17)$$

Учитывая соотношение (11.16), подставим выражение (11.17) в (11.9). Так как полученное соотношение должно быть справедливо при любой размерности пространства N =1,2,..., то приходим к рекуррентному уравнению (11.2), справедливому при любом s = 1,2,..., где $Y^{(0)}$ – любое, не равное нулю, число. Сравнение выражений (11.17) и (11.4) дает:

$$(-1)^{(N-1)}\Gamma(N)\sum_{t=0}^{N-1}\Psi^{(N-t)a}_b Y^{(t)} = (N-1)!\delta^a_b \det ||\Psi^i_j||. \qquad (11.18)$$

Свернем индексы в формуле (11.4). В результате получим:

$$\Phi(N) = \Gamma(N+1)\det ||\Psi^i_j||.$$

Тогда из соотношения (11.16) следует, что:

$$\det ||\Psi^i_j|| = (-1)^N Y^{(N)}. \qquad (11.19)$$

Используя это равенство, выражение (11.18) можно записать в виде, показывающем взаимосвязь различных степеней тензора Ψ^i_j:

$$\sum_{t=0}^{N} \Psi_b^{(N-t)a} Y^{(t)} = 0.$$

Так как $Y^{(0)} \neq 0$, то разрешая данное уравнение относительно $\Psi_b^{(N)a}$, получим:

$$\Psi_b^{(N)a} = -\frac{1}{Y^{(0)}} \sum_{s=1}^{N} \Psi_b^{(N-s)a} Y^{(s)}.$$

Таким образом, N-ая степень произвольного тензора второго ранга Ψ_{ij} в N-мерном псевдоримановом пространстве может быть выражена через низшие степени этого тензора по формуле (11.1), где коэффициенты разложения $Y^{(s)}$ определяются из рекуррентного соотношения (11.2). Тем самым, теорема доказана.

Следствие 11.1. В произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ определитель тензора второго ранга Ψ_{ij} может быть представлен в виде:

$$\det ||\Psi_{ij}|| = \det ||g_{ik}|| \det ||\Psi^k_j|| = (-1)^N g Y^{(N)},$$

где коэффициент $Y^{(N)}$ определяется рекуррентным уравнением (11.2).

Приведем теперь выражения для коэффициентов $Y^{(s)}$ при нескольких значениях $s : s = 1, \ldots, 4$. Используя рекуррентное уравнение (11.2), после несложных вычислений будем иметь:

$$Y^{(1)} = -\Psi_{(1)}, \qquad Y^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[\Psi_{(2)} - \Psi_{(1)}^2\right], \tag{11.20}$$

$$Y^{(3)} = \frac{1}{6}\left[3\Psi_{(2)}\Psi_{(1)} - 2\Psi_{(3)} - \Psi_{(1)}^3\right],$$

$$Y^{(4)} = \frac{1}{24}\left[3\Psi_{(2)}^2 + \Psi_{(1)}^4 - 6\Psi_{(1)}^2\Psi_{(2)} - 6\Psi_{(4)} + 8\Psi_{(3)}\Psi_{(1)}\right],$$

где $\Psi_{(1)}$, $\Psi_{(2)}$, $\Psi_{(3)}$ и $\Psi_{(4)}$ – инварианты первой, второй, третьей и, соответственно, четвертой степеней тензора Ψ_{mk}.

Замечание. Доказанная формула (11.1) во многих отношениях соответствует формуле Кэли – Гамильтона для матриц [16]. Но прямое распространение теоремы Кэли – Гамильтона на степени тензора второго ранга в произвольном псевдоримановом пространстве проводить нельзя, так как при доказательстве теоремы Кэли – Гамильтона неявно использовались аксиомы евклидовых пространств. Более того, прямое распространение результатов, полученных в теории матриц, на тензоры второго ранга в неевклидовых пространствах неправомерно. И хотя компонентам любого тензора можно взаимно однозначно поставить в соответствие элементы матрицы, правила работы с матрицей и тензором совпадают только в евклидовых пространствах.

Так, например, в матричной алгебре определена операция Tr, которая состоит в простом сложении элементов, стоящих на диагонали матрицы. Тензорная же алгебра требует, чтобы свертка компонент Ψ_{ik} производилась метрическим тензором g^{ik}: $g^{ik}\Psi_{ik}$. Поэтому тензорное обобщение этой операции в пространствах, сигнатура метрики которых не знакоопределена, требует, чтобы часть элементов, стоящих на диагонали матрицы, брать со знаком плюс, а часть – со знаком минус (при этом необходимо еще использовать системы координат, в которых метрический тензор имеет галилеев вид).

Количество знаков минус и их расположение на диагонали матрицы целиком предопределяется видом метрического тензора. В более общем случае, когда метрический тензор g^{mn} недиагонален, в выражение для инварианта $\Psi_{(1)} = \Psi_{mn}g^{mn}$ войдут и недиагональные компоненты матрицы $||\Psi_{mn}||$.

Единственный случай пространств, где эти операции совпадают – это евклидовы пространства, для которых метрическим тензором служит символ Кронекера. Во всех остальных случаях, во избежание ошибок и достижения необходимой степени математической строгости, все соотношения для тензоров второго ранга в произвольных псевдоримановых пространствах должны доказываться особо. Одним из первых на это обстоятельство обратил внимание Петров [10] и провел доказательство ряда теорем для тензоров в вещественных псевдоримановых пространствах. В частности, такой анализ показал, что в N-мерном вещественном псевдоримановом пространстве даже канонические типы тензора второго ранга отличаются от канонических типов этого же тензора

в N-мерном вещественном евклидовом пространстве, так как характеристическое уравнение $det||\Psi_{ik} - \lambda g_{ik}|| = 0$ в этих случаях имеет, вообще говоря, разные корни.

В произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ можно доказать и более сильную теорему о существовании тензорных соотношений.

Теорема 11.2. В произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ справедливо следующее тензорное соотношение:

$$\begin{vmatrix} \Psi_{i_1 j_1} & \Psi_{i_1 j_2} & \cdots & \Psi_{i_1 j_N} \\ \Psi_{i_2 j_1} & \Psi_{i_2 j_2} & \cdots & \Psi_{i_2 j_N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Psi_{i_N j_1} & \Psi_{i_N j_2} & \cdots & \Psi_{i_N j_N} \end{vmatrix} = \tag{11.21}$$

$$= (-1)^N Y^{(N)} \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} & \cdots & g_{i_1 j_N} \\ g_{i_2 j_1} & g_{i_2 j_2} & \cdots & g_{i_2 j_N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{i_N j_1} & g_{i_N j_2} & \cdots & g_{i_N j_N} \end{vmatrix},$$

а коэффициент $Y^{(N)}$ находится из уравнения (11.2).

Доказательство. Перепишем соотношение (10.6) в виде:

$$E_{m_1 m_2 \ldots m_N} \Psi^{m_1 \cdot}_{\cdot j_1} \Psi^{m_2 \cdot}_{\cdot j_2} \ldots \Psi^{m_N \cdot}_{\cdot j_N} = E_{j_1 j_2 \ldots j_N} \det ||\Psi^i_j||,$$

где $det||\Psi^i_j||$ – определитель матрицы, элементами которой являются компоненты тензора Ψ^i_j.

Умножим его на $E i_1 i_2 \ldots i_N$. Учитывая, что в силу второго равенства (10.3) произведение двух аксиальных тензоров Леви-Чивита может быть выражено в виде опре-

делителя матрицы, будем иметь:

$$det\left\|\begin{matrix} g_{i_1m_1} & g_{i_1m_2} & \cdots & g_{i_1m_N} \\ g_{i_2m_1} & g_{i_2m_2} & \cdots & g_{i_2m_N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{i_Nm_1} & g_{i_Nm_2} & \cdots & g_{i_Nm_N} \end{matrix}\right\| \Psi^{m_1\cdot}_{\cdot j_1}\Psi^{m_2\cdot}_{\cdot j_2}\cdots\Psi^{m_N\cdot}_{\cdot j_N} =$$

$$= det\|\Psi^i_j\|\cdot det\left\|\begin{matrix} g_{i_1j_1} & g_{i_1j_2} & \cdots & g_{i_1j_N} \\ g_{i_2j_1} & g_{i_2j_2} & \cdots & g_{i_2j_N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{i_Nj_1} & g_{i_Nj_2} & \cdots & g_{i_Nj_N} \end{matrix}\right\|.$$

Используя свойства определителей, преобразуем левую часть этого равенства. В результате получим:

$$det\left\|\begin{matrix} \Psi_{i_1j_1} & \Psi_{i_1j_2} & \cdots & \Psi_{i_1j_N} \\ \Psi_{i_2j_1} & \Psi_{i_2j_2} & \cdots & \Psi_{i_2j_N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Psi_{i_Nj_1} & \Psi_{i_Nj_2} & \cdots & \Psi_{i_Nj_N} \end{matrix}\right\| =$$

$$= det\|\Psi^i_j\|\cdot det\left\|\begin{matrix} g_{i_1j_1} & g_{i_1j_2} & \cdots & g_{i_1j_N} \\ g_{i_2j_1} & g_{i_2j_2} & \cdots & g_{i_2j_N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{i_Nj_1} & g_{i_Nj_2} & \cdots & g_{i_Nj_N} \end{matrix}\right\|.$$

Учитывая, что $det\|\Psi^i_j\| = (-1)^N Y^{(N)}$, приходим к соотношению (11.21).

Теорема доказана.

Следствие 11.2. В произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ из соотношения (11.21) можно получить и другие полезные тензорные равенства, производя в нем последовательную свертку индексов i_1 и j_1, i_2 и j_2, ..., i_N и j_N.

§ 12. Теорема об обратном тензоре

Рассмотрим в пространстве $R^N_{p,N-p}$ некоторый невырожденный тензор Ψ_{ik}:

$$\det ||\Psi_{ik}|| \neq 0.$$

Обратным тензором χ^{mi} к тензору Ψ_{ik} назовем тензор, удовлетворяющий соотношению:

$$\chi^{mi}\Psi_{ik} = \delta^m_k. \tag{12.1}$$

Обратный тензор в пространстве $R^N_{p,N-p}$ может быть выражен через степени тензора Ψ_{ik} и их инварианты. В частности, справедлива следующая

Теорема 12.1. Для любого невырожденного тензора Ψ_{ik} в пространстве $R^N_{p,N-p}$ обратный тензор χ^{mi} имеет вид:

$$\chi^{mi} = -\frac{1}{Y^{(N)}}\sum_{s=0}^{N-1}\Psi^{(N-s-1)mi}Y^{(s)}. \tag{12.2}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (11.1) на $Y^{(0)} \neq 0$ и перенесем все слагаемые налево. В результате получим:

$$Y^{(0)}\Psi^{(N)}_{ik} + \sum_{s=1}^{N}\Psi^{(N-s)}_{ik}Y^{(s)} = 0.$$

Выделим под знаком суммы слагаемое с $s = N$. Так как $\Psi^{(0)}_{ik} = g_{ik}$, то будем иметь:

$$Y^{(0)}\Psi^{(N)}_{ik} + \sum_{s=1}^{N-1}\Psi^{(N-s)}_{ik}Y^{(s)} + Y^{(N)}g_{ik} = 0.$$

Заметим теперь, что первое слагаемое полученного соотношения соответствует значению $s = 0$ и может быть включено в состав суммы. Поднимая индекс i в этом равенстве с помощью метрического тензора g^{mi}, получим:

$$\sum_{s=0}^{N-1} \Psi_k^{(N-s)m} Y^{(s)} + Y^{(N)} \delta_k^l = 0. \qquad (12.3)$$

Так как $Y^{(N)}$ согласно соотношению (11.19) выражается через произведение определителей тензора Ψ_{kj} и метрического тензора g^{ik}, то в силу невырожденности этих тензоров можно записать:

$$(-1)^N Y^{(N)} = \det ||\Psi_k^i|| = \det ||g^{ij}|| \cdot \det ||\Psi_{jk}|| \neq 0.$$

Разделив соотношение (12.3) на $Y^{(N)} \neq 0$ и перенося последнее слагаемое направо, будем иметь:

$$\frac{1}{Y^{(N)}} \sum_{s=0}^{N-1} \Psi_k^{(N-s)m} Y^{(s)} = -\delta_k^m.$$

Умножая это равенство на -1 и выделяя в левой части сомножителем тензор Ψ_{ik}, приведем его к виду:

$$\left\{ -\frac{1}{Y^{(N)}} \sum_{s=0}^{N-1} \Psi^{(N-s-1)mi} Y^{(s)} \right\} \Psi_{ik} = \delta_k^m.$$

В силу (12.1) выражение, стоящее в фигурных скобках, является тензором, обратным к тензору Ψ_{ik}. Теорема доказана.

§ 13. Нахождение коэффициентов разложений

Рекуррентное соотношение (11.2), выражающее коэффициенты $Y^{(s)}$ как функции инвариантов $\Psi^{(s)}$, для аналитических исследований иногда оказывается не совсем удобным.

Поэтому представляет интерес поиск иных соотношений, связывающих коэффициенты $Y^{(s)}$ с инвариантами степеней тензора Ψ_{ik}. Одно из таких соотношений мы и установим.

Теорема 13.1. В произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ коэффициенты $Y^{(s)}$, входящие в выражения (11.1), (11.19), (11.21) и (12.2), определяются формулой

$$Y^{(s)} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma+} \frac{dz}{z^{s+1}} \exp\Big[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi^{(k)} z^k}{k}\Big], \tag{13.1}$$

где Γ^+ – произвольный малый ($|z| < 1$) контур, охватывающий полюс $z = 0$ подынтегральной функции и обходимый в положительном направлении.

Доказательство. Изменим в выражении (12.2) индекс суммирования k на n так, чтобы $n = s - k$. В результате получим:

$$sY^{(s)} + \sum_{n=1}^{s} \Psi^{(n)} Y^{(s-n)} = 0. \tag{13.2}$$

Воспользуемся формулой [17] деления степенных рядов

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k} = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{13.3}$$

где коэффициенты c_k находятся из рекуррентного уравнения

$$c_s - b_s + \frac{1}{a_0}\sum_{n=1}^{s} a_n c_{s-n} = 0. \tag{13.4}$$

Сравнивая формулы (13.2) и (13.4), легко заметить, что они совпадают, если выбрать

$$a_k = \frac{a_0 \Psi^{(k)}}{N}, \quad c_k = NY^{(k)}, \quad b_k = (N-k)Y^{(k)}. \tag{13.5}$$

Следовательно, выражение (13.3) с учетом (13.5) можно записать в виде:

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}(N-k)Y^{(k)}x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Psi^{(k)}x^k} = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}x^k. \tag{13.6}$$

Вводя обозначения

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Psi^{(k)}x^k, \quad \xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}x^k, \tag{13.7}$$

выражение (13.6) приведем к виду:

$$N\xi(x) - x\frac{d\xi(x)}{dx} = A(x)\xi(x).$$

Решая это дифференциальное уравнение, получим

$$\xi(x) = c_0 \exp\left[\int \frac{N - A(x)}{x}\, dx\right].$$

Учитывая, что $\Psi^{(0)} = N$, приходим к следующему выражению

$$\xi(x) = c_0 \exp\Big[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi^{(k)} x^k}{k}\Big]. \tag{13.8}$$

Сравнивая выражения (13.7) и (13.8) при $x = 0$, найдем, что $c_0 = Y^{(0)}$. Так как $Y^{(0)}$ – любое, не равное нулю, число, то для удобства положим $Y^{(0)} = 1$. Тогда приравнивая второе из соотношений (13.7) выражению (13.8), окончательно будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)} x^k = \exp\Big[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi^{(k)} x^k}{k}\Big]. \tag{13.9}$$

Это равенство позволяет определить коэффициенты $Y^{(s)}$ как функции инвариантов степеней тензора Ψ_{km}. Для этого продифференцируем соотношение (13.9) s раз по x и положим $x = 0$. В результате приходим к следующему выражению:

$$Y^{(s)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{s!} \frac{d^s}{dx^s} \exp\Big[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi^{(k)} x^k}{k}\Big]. \tag{13.10}$$

Используя понятие вычета, это выражение можно записать в виде интеграла (13.1) по комплексной плоскости. Теорема доказана.

Полученное соотношение (13.1) позволяет исследовать аналитическую зависимость коэффициентов $Y^{(s)}$ от инвариантов степеней тензора второго ранга Ψ_{km} в произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,\,N-p}$ при любом значении s, заключенном в интервале от $s = 1$ до $s = N$.

§ 14. Тензорное соотношение типа свертки

При проведении различных расчетов в теории поля часто необходимо проводить коммутацию двух или нескольких матриц, причем зачастую эти матрицы имеют самый общий вид. В теории гравитации аналогичная задача возникает для свертки двух тензоров второго ранга. Решение некоторых из этих задач позволяет упростить следующая теорема.

Теорема 14.1. Результат последовательной коммутации произвольного тензора φ_{jm} с $(N-1)$-ой степенью любого тензора второго ранга Ψ_{mn} в произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ определяется выражением:

$$\begin{gathered}\varphi^k_j\Psi^{(N-1)}_{km}+\Psi_{jk}\varphi^{kn}\Psi^{(N-2)}_{nm}+\ldots+\Psi^{(N-1)}_{jk}\varphi^k_m=\\ =Y^{(1)}[\varphi^k_j\Psi^{(N-2)}_{km}+\Psi_{jk}\varphi^{kn}\Psi^{(N-3)}_{nm}+\ldots+\Psi^{(N-2)}_{jk}\varphi^k_m]-\\ -\ldots-Y^{(N-1)}\varphi_{jm}+\Psi^{(N-1)}_{jm}\varphi^{(1)}+\Psi^{(N-2)}_{jm}[\Psi_{ik}\varphi^{ik}+\\ +Y^{(1)}\varphi^{(1)}]+\ldots+g_{jm}[\Psi^{(N-1)}_{ik}\varphi^{ik}+Y^{(1)}\Psi^{(N-2)}_{ik}\varphi^{ik}+\\ +Y^{(2)}\Psi^{(N-3)}_{ik}\varphi^{ik}+\ldots+Y^{(N-1)}\varphi^{(1)}],\end{gathered}\tag{14.1}$$

а коэффициенты $Y^{(s)}=Y^{(s)}(\Psi^{(k)})$ можно найти из выражения (13.1).

Доказательство. Построим вспомогательный тензор

$$\Phi^i_n=E^{p_1p_2\ldots p_N}E_{k_1k_2\ldots k_{N-1}n}\underbrace{\Psi^{k_1}_{p_1}\Psi^{k_2}_{p_2}\ldots\Psi^{i}_{p_{N-1}}\Psi^{j}_{p_N}}_{N}\varphi^{k_{N-1}}_j,$$

где $E^{p_1p_2\ldots p_N}$ – абсолютно антисимметричный аксиальный тензор Леви-Чивита.

Это выражение может быть упрощено двумя путями. С одной стороны, можно учесть соотношение (10.1).

С другой стороны, на основании леммы 10.3, можно использовать соотношение

$$E^{p_1 p_2 \dots p_N} \Psi^{k_1}_{p_1} \Psi^{k_2}_{p_2} \dots \Psi^{k_N}_{p_N} = E^{k_1 k_2 \dots k_N} \det ||\Psi^n_m||.$$

Приравнивая выражения, полученные при расчете по этим двум путям, после довольно громоздких тождественных преобразований приходим к формуле (14.1), где коэффициенты $Y^{(s)}$ определяются из выражения (13.1).

Таким образом, в соответствии с выражением (14.1) результат коммутации тензора φ_{jm} с $(N-1)$-ой степенью тензора Ψ_{mk} выражается через низшие степени этого тензора. Теорема доказана.

Следствие 14.1. Сопоставляя компонентам тензора φ^k_j элементы матрицы N-го порядка A, а компонентам тензора Ψ^k_m – элементы матрицы B, получим матричный аналог формулы (14.1):

$$AB^{N-1} + BAB^{N-2} + \dots + B^{N-1}A = -Y^{(1)}[AB^{N-2} +$$
$$+BAB^{N-3} + \dots + B^{N-2}A] - Y^{(2)}[AB^{N-3} + BAB^{N-4} +$$
$$+\dots + B^{N-3}A] - \dots - Y^{(N-1)}A + B^{N-1}\mathrm{tr}\,(A) + B^{N-2} \times$$
$$\times[\mathrm{tr}\,(BA) + Y^{(1)}\mathrm{tr}\,(A) + B^{N-3}[\mathrm{tr}\,(B^2A) + Y^{(1)}\mathrm{tr}\,(BA) +$$
$$+Y^{(2)}\mathrm{tr}\,(A)] + \dots + B[\mathrm{tr}\,(B^{N-2}A) + Y^{(1)}\mathrm{tr}\,(B^{N-3}A) +$$
$$+Y^{(2)}\mathrm{tr}\,(B^{N-4}A) + \dots + Y^{N-2}\mathrm{tr}\,(A)] + E[\mathrm{tr}\,(B^{N-1}A) +$$
$$+Y^{(1)}\mathrm{tr}\,(B^{N-2}A) + Y^{(2)}\mathrm{tr}\,(B^{N-3}A) + \dots + Y^{(N-1)}\mathrm{tr}\,(A)].$$

Следствие 14.2. В случае $\varphi_{jm} = \Psi_{jm}$ выражение (14.1), как несложно убедиться, переходит в соотношение (11.1).

Следствие 14.3. В случае, когда тензор φ_{jm} с точностью до конформного множителя совпадает с метрическим тензором g_{jm}, выражение (14.1), как и следовало ожидать, превращается в тривиальное равенство: $\Psi_{jm}^{(N-1)} = \Psi_{jm}^{(N-1)}$.

§ 15. Нелинейные тензорные соотношения для антисимметричного тензора второго ранга

Доказанные тензорные соотношения справедливы при любом выборе тензора второго ранга. Однако в случае антисимметричного тензора второго ранга в пространстве $R^N_{p,N-p}$ они существенно упрощаются.

Любой тензор второго ранга Ψ_{ik} в псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ можно инвариантным образом записать в виде суммы симметричного $S_{ki} = S_{ik}$ и антисимметричного $A_{ki} = -A_{ik}$ тензоров: $\Psi_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$, где

$$S_{ik} = \frac{1}{2}[\Psi_{ik} + \Psi_{ki}], \quad A_{ik} = \frac{1}{2}[\Psi_{ik} - \Psi_{ki}]. \tag{15.1}$$

Эти формулы позволяют по заданному тензору Ψ_{ik} найти его симметричную и антисимметричную части.

В N-мерном пространстве произвольный антисимметричный тензор описывается $N(N-1)/2$ числом независимых компонент, в то время как число независимых компонент симметричного тензора в общем случае больше: $N(N+1)/2$. Поэтому и все алгебраические соотношения для антисимметричного тензора должны содержать меньшее число слагаемых, чем для симметричного. Так как антисимметричные тензоры достаточно широко используются в физике и механике (к их числу, как извест-

но, принадлежит тензор угловой скорости, тензор электромагнитного поля [6] и другие), то установление алгебраических соотношений, которым удовлетворяют эти тензоры, представляет самостоятельный интерес.

Однако, прежде чем приступить к установлению этих соотношений, докажем следующую лемму.

Лемма 15.1. Четная степень антисимметричного тензора $a_{ik} = -a_{ki}$ представляет собой симметричный тензор, а нечетная степень – антисимметричный.

Доказательство. Рассмотрим некоторый антисимметричный тензор a_{ik} в пространстве $R^N_{p,N-p}$. Построим четную степень этого тензора: $a^{(2s)}_{ik}$. Покажем, что антисимметричная часть этого тензора $A_{ik} = (a^{(2s)}_{ik} - a^{(2s)}_{ki})/2$ равна нулю и он, следовательно, в силу определения (15.1) является симметричным тензором. Действительно, записывая выражение для тензора A_{ik} в виде

$$A_{ik} = \frac{1}{2}[a_{ij_1} g^{j_1 m_1} a_{m_1 j_2} g^{j_2 m_3} \ldots g^{j_{2s-1} m_{2s-1}} a_{m_{2s-1} k} - a^{(2s)}_{ki}],$$

переставим индексы у всех тензоров a_{ij}, входящих в первое слагаемое этого равенства. При перестановке индексов у тензора a_{ij} изменяется знак на противоположный. Но так как в это слагаемое входит четное число $(2s)$ сомножителей, то общий знак не изменится.

Переставим теперь местами и сами сомножители так, чтобы последний стал первым, предпоследний – вторым и т.д. В результате получим:

$$A_{ik} = \frac{1}{2}[a_{k m_{2s-1}} g^{j_{2s-1} m_{2s}} a_{j_{2s-1} m_{2s-1}} \ldots g^{j_1 m_1} a_{j_1 i} - a^{(2s)}_{ki}].$$

Так как метрический тензор пространства $R^N_{p,N-p}$ является симметричным, то в силу определения (III.1) первое

слагаемое может быть записано в виде $a_{ki}^{(2s)}$. Поэтому $A_{ik} = 0$ и первая часть леммы доказана.

Рассмотрим теперь нечетную степень антисимметричного тензора $a_{ik}^{(2s+1)}$. Покажем, что этот тензор является антисимметричным, т.е. его симметричная часть

$$S_{ik} = \frac{1}{2}[a_{ik}^{(2s+1)} - a_{ki}^{(2s+1)}] \tag{15.2}$$

равна нулю.

Доказательство этого утверждения производится совершенно аналогично доказательству первой части леммы, единственное отличие состоит в том, что при перестановке индексов у всех тензоров a_{ij}, входящих в состав первого слагаемого в выражении (15.2), у него появится знак минус, так как оно содержит сомножителями нечетное число тензоров a_{ij}. Лемма доказана.

Следствие 15.1. Все инварианты нечетной степени любого антисимметричного тензора равны нулю. Для доказательства этого утверждения заметим, что инвариант нечетной степени антисимметричного тензора представляет собой свертку симметричного тензора – метрического тензора g^{ik} – и антисимметричного тензора $a_{ik}^{(2s+1)}$: $a^{(2s+1)} = g^{ik}a_{ik}^{(2s+1)}$. А такая свертка тождественно равна нулю, в чем можно непосредственно убедиться, переобозначая сначала немые индексы суммирования $i \to k$ и $k \to i$, затем переставляя местами эти индексы:

$$a^{(2s+1)} = g^{ki}a_{ki}^{(2s+1)} = -g^{ik}a_{ik}^{(2s+1)}.$$

Это свойство инвариантов нечетных степеней антисимметричного тензора существенно упрощает алгебраические соотношения, которым он удовлетворяет.

Теорема 15.1. Все коэффициенты $Y^{(2s+1)}$, входящие в соотношения (11.1), (11.19), (11.21) и (12.2) и имеющие нечетный индекс, для любого антисимметричного тензора a_{ij} равны нулю.

Доказательство. Запишем коэффициенты $Y^{(2s+1)}$ в аналитическом виде (13.1). Так как при любом t для антисимметричного тензора $a^{2t+1} = 0$, то в бесконечной сумме, стоящей в правой части соотношения (13.1), останутся только члены с четной степенью x и оно примет вид:

$$Y^{(2s+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(2s+1)!} \frac{d^{2s+1}}{dx^{2s+1}} \exp\Big[-\sum_{t=1}^{\infty} \frac{a^{(2t)}x^{2t}}{2t}\Big].$$

Функция, стоящая в показателе экспоненты, является четной относительно x. Если теперь от этой функции взять производную нечетного порядка $2s+1$, то в результате получим нечетную функцию x, которая при стремлении x к нулю с необходимостью обратится в нуль. Следовательно $Y^{(2s+1)} = 0$ для любого антисимметричного тензора.

Следствие 15.2. Определитель любого антисимметричного тензора второго ранга в пространстве нечетной размерности тождественно равен нулю.

Для доказательства этого утверждения заметим, что при $N = 2s+1$ в силу выражения (11.19) можно записать:

$$\det ||a_{ik}|| = \det ||g_{in}|| \det ||a_k^n|| = -Y^{(2s+1)} \det ||g_{ik}||.$$

Так как $Y^{(2s+1)} = 0$, то $det\ ||a_{ik}|| = 0$.

Теорема 15.2. N-ая степень антисимметричного тензора второго ранга a_{ik} в пространстве $R^N_{p,N-p}$ явля-

ется комбинацией четных степеней тензора a_{ik}, если размерность пространства N – четное число и нечетных степеней тензора a_{ik}, если размерность пространства N – нечетна:

$$a_{km}^{(N)} = -\frac{1}{Y^{(0)}} \sum_{s=1}^{[N/2]} a_{km}^{(N-2s)} Y^{(2s)}, \tag{15.3}$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

Доказательство. Так как для антисимметричного тензора a_{ik} все коэффициенты $Y^{(2s+1)} = 0$, то вводя новый индекс суммирования $s = 2t$ в выражении (11.1), приходим к соотношению (15.3).

Теорема 15.3. Тензор χ^{mi}, обратный к невырожденному антисимметричному тензору a_{ik}, в пространстве четной размерности $N = 2M$ определяется формулой:

$$\chi^{mi} = -\frac{1}{Y^{(2M)}} \sum_{s=0}^{M-1} a_{(2M-2s-1)}^{mi} Y^{(2s)}.$$

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично доказательству теоремы 12.1 с использованием выражения (15.3).

ГЛАВА 4
ПРОСТРАНСТВА С НЕБОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 16. Тензорная алгебра в четырехмерном псевдоримановом пространстве-времени

Все физические процессы происходят в четырехмерном вещественном псевдоримановом пространстве-времени. Поэтому для проведения различных исследований нам необходимо записать полученные ранее формулы для случая пространства $R^4_{1,3}$.

Подставляя соотношения (11.20) в выражение (11.1) при $N = 4$, получим формулу для четвертой степени произвольного тензора Ψ_{mk}:

$$\Psi^{(4)}_{mk} = \Psi^{(3)}_{mk}\Psi_{(1)} + \frac{1}{2}\Psi^{(2)}_{mk}\left[\Psi_{(2)} - \Psi^2_{(1)}\right] + \tag{16.1}$$

$$+\frac{1}{6}\Psi_{mk}\left[2\Psi_{(3)} + \Psi^3_{(1)} - 3\Psi_{(2)}\Psi_{(1)}\right] +$$

$$+\frac{1}{24}g_{mk}\left[6\Psi_{(2)}\Psi^2_{(1)} - 8\Psi_{(3)}\Psi_{(1)} - 3\Psi^2_{(2)} - \Psi^4_{(1)} + 6\Psi_{(4)}\right].$$

Таким образом, в четырехмерном псевдоримановом пространстве любая целочисленная степень тензора второго ранга, начиная с четвертой, может быть выражена через

низшие степени этого тензора и четыре первых независимых инварианта $\Psi_{(1)}$, $\Psi_{(2)}$, $\Psi_{(3)}$, $\Psi_{(4)}$. Совершенно аналогично и любой инвариант P-го порядка ($P > 4$) может быть выражен через эти независимые инварианты.

Замечая далее, что $Y^{(4)}$ совпадает с определителем тензора Ψ_k^m, найдем:

$$\det ||\Psi_k^m|| = \frac{1}{24}\left[3\Psi_{(2)}^2 + 8\Psi_{(1)}\Psi_{(3)} - 6\Psi_{(2)}\Psi_{(1)}^2 + \Psi_{(1)}^4 - 6\Psi_{(4)}\right]. \tag{16.2}$$

Совершенно аналогично из соотношения (12.2) найдем выражение для тензора χ^{mi}, обратного к невырожденному тензору Ψ_{ik}:

$$\chi^{mi} = \left\{24\Psi_{(3)}^{mi} - 24\Psi_{(2)}^{mi}\Psi_{(1)} + 12\Psi^{mi}\left[\Psi_{(1)}^2 - \Psi_{(2)}\right] - \right. \tag{16.3}$$

$$\left. -4g^{mi}\left[\Psi_{(1)}^3 - 3\Psi_{(1)}\Psi_{(2)} + 2\Psi_{(3)}\right]\right\} \times$$

$$\times\left[6\Psi_{(4)} + 6\Psi_{(2)}\Psi_{(1)}^2 - 8\Psi_{(1)}\Psi_{(3)} - 3\Psi_{(2)}^2 - \Psi_{(1)}^4\right]^{-1}.$$

И, наконец, найдем правило коммутации произвольного тензора φ_j^k с третьей степенью тензора Ψ_{km} в пространстве $R_{1,3}^4$. Подставляя соотношения (11.20) в выражение (14.1), получим:

$$\varphi_j^k\Psi_{km}^{(3)} + \Psi_{jk}\varphi^{kn}\Psi_{nm}^{(2)} + \Psi_{jk}^{(2)}\varphi^{kn}\Psi_{nm} + \Psi_{jk}^{(3)}\varphi_m^k =$$

$$= \Psi_{(1)}\left[\varphi_j^k\Psi_{km}^{(2)} + \Psi_{jk}\varphi^{kn}\Psi_{nm} + \Psi_{jk}^{(2)}\varphi_m^k\right] + \frac{1}{2}\left[\Psi_{(2)} - \Psi_{(1)}^2\right] \times$$

$$\times\left[\varphi_j^k\Psi_{km} + \Psi_{jk}\varphi_m^k\right] + \frac{1}{6}\left[\Psi_{(1)}^3 - 3\Psi_{(1)}\Psi_{(2)} + 2\Psi_{(3)}\right]\varphi_{jm} +$$

$$+\Psi_{jm}^{(3)}\varphi + \Psi_{jm}^{(2)}\left[\Psi_{ik}\varphi^{ik} - \Psi_{(1)}\varphi\right] + \Psi_{jm}\left[\Psi_{ik}^{(2)}\varphi^{ik} - \Psi_{(1)}\Psi_{ik}\varphi^{ik} +\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Psi_{(1)}^2-\Psi_{(2)}\right)\varphi\Big]+g_{jm}\Big[\Psi_{ik}^{(3)}\varphi^{ik}-\Psi_{(1)}\Psi_{ik}^{(2)}\varphi^{ik}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\Psi_{(1)}^2-\Psi_{(2)}\right)\Psi_{ik}\varphi^{ik}+\frac{1}{6}\left(\Psi_{(1)}^3-3\Psi_{(1)}\Psi_{(2)}+2\Psi_{(3)}\right)\varphi\Big].$$

Однако в четырехмерном псевдоримановом пространстве-времени существуют [18] более общие тензорные соотношения, для которых соотношения (16.1) и (16.2) являются следствиями.

В частности, записывая равенство (11.21) при $N=4$ и полагая в нем $i_1=a,\ i_2=b,\ i_3=j,\ i_4=n,\ j_1=k,\ j_2=i,\ j_3=m,\ j_4=p$, будем иметь:

$$\begin{vmatrix} \Psi_{ak} & \Psi_{ai} & \Psi_{am} & \Psi_{ap} \\ \Psi_{bk} & \Psi_{bi} & \Psi_{bm} & \Psi_{bp} \\ \Psi_{jk} & \Psi_{ji} & \Psi_{jm} & \Psi_{jp} \\ \Psi_{nk} & \Psi_{ni} & \Psi_{nm} & \Psi_{np} \end{vmatrix} = Y^{(4)} \begin{vmatrix} g_{ak} & g_{ai} & g_{am} & g_{ap} \\ g_{bk} & g_{bi} & g_{bm} & g_{bp} \\ g_{jk} & g_{ji} & g_{jm} & g_{jp} \\ g_{nk} & g_{ni} & g_{nm} & g_{np} \end{vmatrix},$$

где $Y^{(4)}$ дается выражением (11.20).

Раскрывая в этом равенстве определители, приходим к соотношению:

$$\Psi_{ak}[\Psi_{bi}(\Psi_{jp}\Psi_{nm}-\Psi_{jm}\Psi_{np})- \tag{16.4}$$

$$-\Psi_{bp}(\Psi_{ji}\Psi_{nm}-\Psi_{jm}\Psi_{ni})+\Psi_{bm}(\Psi_{ji}\Psi_{np}-\Psi_{jp}\Psi_{ni})]-$$

$$-\Psi_{ai}[\Psi_{bk}(\Psi_{jp}\Psi_{nm}-\Psi_{jm}\Psi_{np})-\Psi_{bp}(\Psi_{jk}\Psi_{nm}-\Psi_{jm}\Psi_{nk})+$$

$$+\Psi_{bm}(\Psi_{jk}\Psi_{np}-\Psi_{jp}\Psi_{nk})]+\Psi_{am}[\Psi_{bi}(\Psi_{jk}\Psi_{np}-\Psi_{jp}\Psi_{nk})-$$

$$-\Psi_{bk}(\Psi_{ji}\Psi_{np}-\Psi_{jp}\Psi_{ni})+\Psi_{bp}(\Psi_{ji}\Psi_{nk}-\Psi_{jk}\Psi_{ni})]-$$

$$-\Psi_{ap}[\Psi_{bi}(\Psi_{jk}\Psi_{nm}-\Psi_{jm}\Psi_{nk})-\Psi_{bk}(\Psi_{ji}\Psi_{nm}-\Psi_{jm}\Psi_{ni})+$$

$$+\Psi_{bm}(\Psi_{ji}\Psi_{nk}-\Psi_{jk}\Psi_{ni})]=\Big\{g_{ak}[g_{bi}(g_{jp}g_{nm}-g_{jm}g_{np})-$$

$$-g_{bp}(g_{ji}g_{nm} - g_{jm}g_{ni}) + g_{bm}(g_{ji}g_{np} - g_{jp}g_{ni})]-$$
$$-g_{ai}[g_{bk}(g_{jp}g_{nm} - g_{jm}g_{np}) - g_{bp}(g_{jk}g_{nm} - g_{jm}g_{nk})+$$
$$+g_{bm}(g_{jk}g_{np} - g_{jp}g_{nk})] + g_{am}[g_{bi}(g_{jk}g_{np} - g_{jp}g_{nk})-$$
$$-g_{bk}(g_{ji}g_{np} - g_{jp}g_{ni}) + g_{bp}(g_{ji}g_{nk} - g_{jk}g_{ni})]-$$
$$-g_{ap}[g_{bi}(g_{jk}g_{nm} - g_{jm}g_{nk}) - g_{bk}(g_{ji}g_{nm} - g_{jm}g_{ni})+$$
$$+g_{bm}(g_{ji}g_{nk} - g_{jk}g_{ni})]\Big\}Y^{(4)}.$$

Произведем последовательную свертку индексов в выражении (16.4). Сворачивая индексы k и j, получим:

$$\Psi_{bi}(\Psi^{(2)}_{am}\Psi_{np} - \Psi^{(2)}_{ap}\Psi_{nm}) - \Psi_{bm}(\Psi^{(2)}_{ai}\Psi_{np} - \Psi^{(2)}_{ap}\Psi_{ni})+ \tag{16.5}$$
$$+\Psi_{bp}(\Psi^{(2)}_{ai}\Psi_{nm} - \Psi^{(2)}_{am}\Psi_{ni}) - \Psi_{ai}[\Psi^{(2)}_{bm}\Psi_{np} - \Psi^{(2)}_{bp}\Psi_{nm}-$$
$$-\Psi_{bm}(\Psi_{(1)}\Psi_{np} - \Psi^{(2)}_{np}) + \Psi_{bp}(\Psi_{(1)}\Psi_{nm} - \Psi^{(2)}_{nm})]+$$
$$+\Psi_{am}[\Psi^{(2)}_{bi}\Psi_{np} - \Psi^{(2)}_{bp}\Psi_{ni} - \Psi_{bi}(\Psi_{(1)}\Psi_{np} - \Psi^{(2)}_{np})+$$
$$+\Psi_{bp}(\Psi_{(1)}\Psi_{ni} - \Psi^{(2)}_{ni})] - \Psi_{ap}[\Psi^{(2)}_{bi}\Psi_{nm} - \Psi^{(2)}_{bm}\Psi_{ni}-$$
$$-\Psi_{bi}(\Psi_{(1)}\Psi_{nm} - \Psi^{(2)}_{nm}) + \Psi_{bm}(\Psi_{(1)}\Psi_{ni} - \Psi^{(2)}_{ni})] =$$
$$= Y^{(4)}\Big\{g_{bi}(g_{ap}g_{nm} - g_{am}g_{np}) + g_{bm}(g_{ai}g_{np} - g_{ap}g_{ni})-$$
$$-g_{bp}(g_{ai}g_{nm} - g_{am}g_{ni})\Big\}.$$

Свернем далее индексы a и i. В результате будем иметь:

$$2\Big\{\Psi^{(3)}_{bm}\Psi_{np} - \Psi^{(3)}_{bp}\Psi_{nm} + \Psi^{(3)}_{np}\Psi_{bm} - \Psi^{(3)}_{nm}\Psi_{bp}+ \tag{16.6}$$

$$+\Psi^{(2)}_{bm}\Psi^{(2)}_{np}-\Psi^{(2)}_{bp}\Psi^{(2)}_{nm}\Big\}+[\Psi_{bp}\Psi_{nm}-\Psi_{bm}\Psi_{np}](\Psi_{(2)}-\Psi^2_{(1)})+$$

$$+2\Big\{\Psi^{(2)}_{bp}\Psi_{nm}-\Psi^{(2)}_{np}\Psi_{bm}+\Psi^{(2)}_{nm}\Psi_{bp}-\Psi^{(2)}_{bm}\Psi_{np}\Big\}\Psi_{(1)}=$$

$$=2Y^{(4)}[g_{bm}g_{np}-g_{bp}g_{nm}].$$

Свернем теперь индексы b и n. Тогда из выражения (16.6) получим соотношение (16.1).

Таким образом, в произвольном четырехмерном псевдоримановом пространстве справедливы тензорные равенства (16.1), (16.4) – (16.6).

§ 17. Тензорные соотношения в трехмерном псевдоримановом пространстве

Полагая в выражениях (11.21) $N=3$ и последовательно сворачивая в нем индексы, несложно убедиться, что в трехмерном псевдоримановом пространстве $R^3_{p,3-p}$ справедливы тензорные соотношения:

$$\Psi_{\alpha\mu}[\Psi_{\beta\nu}\Psi_{\rho\lambda}-\Psi_{\rho\nu}\Psi_{\beta\lambda}]-\Psi_{\beta\mu}[\Psi_{\alpha\nu}\Psi_{\rho\lambda}-\Psi_{\rho\nu}\Psi_{\alpha\lambda}]- \quad (17.1)$$

$$-\Psi_{\rho\mu}[\Psi_{\beta\nu}\Psi_{\alpha\lambda}-\Psi_{\alpha\nu}\Psi_{\beta\lambda}]=\frac{1}{6}[2\Psi_{(3)}-3\Psi_{(2)}\Psi_{(1)}+\Psi^3_{(1)}]\times$$

$$\times\Big\{g_{\alpha\mu}[g_{\beta\nu}g_{\rho\lambda}-g_{\rho\nu}g_{\beta\lambda}]-g_{\beta\mu}[g_{\alpha\nu}g_{\rho\lambda}-g_{\rho\nu}g_{\alpha\lambda}]-$$

$$-g_{\rho\mu}[g_{\beta\nu}g_{\alpha\lambda}-g_{\alpha\nu}g_{\beta\lambda}]\Big\},$$

$$[\Psi_{\alpha\mu}\Psi_{\beta\nu}-\Psi_{\alpha\nu}\Psi_{\beta\mu}]\Psi_{(1)}+\Psi^{(2)}_{\alpha\nu}\Psi_{\beta\mu}-\Psi^{(2)}_{\alpha\mu}\Psi_{\beta\nu}+\Psi_{\alpha\nu}\Psi^{(2)}_{\beta\mu}-$$

$$-\Psi_{\alpha\mu}\Psi^{(2)}_{\beta\nu}=\frac{1}{6}[g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}-g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}]\cdot[2\Psi_{(3)}-3\Psi_{(2)}\Psi_{(1)}+\Psi^3_{(1)}],$$

$$\Psi^{(3)}_{\alpha\mu}(x) = \Psi^{(2)}_{\alpha\mu}(x)\Psi_{(1)} + \frac{1}{2}\Psi_{\alpha\mu}(x)[\Psi_{(2)} - \Psi^2_{(1)}] +$$

$$+\frac{1}{6}g_{\alpha\mu}[2\Psi_{(3)} - 3\Psi_{(1)}\Psi_{(2)} + \Psi^3_{(1)}].$$

Выражения (11.19) и (11.20) при $N = 3$ дают:

$$det||\Psi^{\sigma}_{\eta}|| = \frac{1}{6}\left[2\Psi_{(3)} - 3\Psi_{(2)}\Psi_{(1)} + \Psi^3_{(1)}\right].$$

Если детерминант матрицы третьего порядка, элементами которой являются компоненты тензора $\Psi^{\gamma}_{\nu}(x)$, отличен от нуля ($det||\Psi^{\gamma}_{\nu}(x)|| \neq 0$), то мы можем построить выражение для обратного тензора $\Phi^{\nu}_{\alpha}(x)$. Из последнего равенства (17.1) получим:

$$\Phi^{\nu\alpha}(x) = \frac{6\Psi^{\nu\alpha}_{(2)}(x) - 6\Psi^{\nu\alpha}(x)\Psi_{(1)} + 3g^{\nu\alpha}[\Psi^2_{(1)} - \Psi_{(2)}]}{[2\Psi_{(3)} - 3\Psi_{(1)}\Psi_{(2)} + \Psi^3_{(1)}]}.$$

Замечание. Установленные нами соотношения (17.1) справедливы для тензора второго ранга, не обладающего какими-либо определенными свойствами симметрии относительно операции перестановки индексов. В случае антисимметричного тензора второго ранга $\Psi_{(1)} = \Psi_{(3)} = 0$ и эти соотношения значительно упрощаются.

Таким образом, в трехмерном римановом пространстве любая целочисленная степень тензора второго ранга, начиная с третьей, может быть выражена через низшие степени этого тензора и три первых независимых инварианта $\Psi_{(1)}$, $\Psi_{(2)}$, $\Psi_{(3)}$. Совершенно аналогично можно убедиться, что любой инвариант P-го порядка ($P > 3$) может быть выражен через эти три независимых инварианта. Найдем явный вид этих соотношений.

Теорема 17.1. В любом трехмерном пространстве выражения для степеней $h_{ik}^{(3P)}$, $h_{ik}^{(3P+1)}$ и $h_{ik}^{(3P+2)}$ произвольного тензора второго ранга h_{ik} при $P \geq 1$ могут быть представлены в виде следующих комбинаций метрического тензора g_{ik}, тензоров h_{ik} и $h_{ik}^{(2)}$:

$$h_{ik}^{(3p)} = A_p h_{ik}^{(2)} + B_p h_{ik} + g_{ik} C_p, \tag{17.2}$$

$$h_{ik}^{(3p+1)} = (A_p A_1 + B_p) h_{ik}^{(2)} + (A_p B_1 + C_p) h_{ik} + A_p C_1 g_{ik},$$

$$h_{ik}^{(3p+2)} = [A_p(A_1^2 + B_1) + B_p A_1 + C_p] h_{ik}^{(2)} +$$

$$+ [A_p(A_1 B_1 + C_1) + B_p B_1] h_{ik} + (A_p A_1 + B_p) C_1 g_{ik},$$

где коэффициенты A_p, B_p и C_p представляют собой полиномы от инвариантов (скаляров) $h_{(3)}$, $h_{(2)}$ и $h_{(1)}$ этого тензора и могут быть определены из системы рекуррентных уравнений:

$$A_{p+1} = (A_1^3 + 2A_1 B_1 + C_1) A_p + (A_1^2 + B_1) B_p + A_1 C_p, \tag{17.3}$$

$$B_{p+1} = (A_1^2 B_1 + B_1^2 + A_1 C_1) A_p + (A_1 B_1 + C_1) B_p + B_1 C_p,$$

$$C_{p+1} = (A_1^2 + B_1) C_1 A_p + A_1 C_1 B_p + C_1 C_p$$

с начальными значениями $A_1 = h_{(1)}$,

$$B_1 = \frac{1}{2}[h_{(2)} - h_{(1)}^2], \qquad C_1 = \frac{1}{6}[h_{(1)}^3 - 3h_{(1)} h_{(2)} + 2h_{(3)}].$$

Доказательство. Обобщая последнее из соотношений (17.1) на произвольную степень $3P$ и полагая $P \geq 1$, запишем:

$$h_{ik}^{(3p)} = A_p h_{ik}^{(2)} + B_p h_{ik} + g_{ik} C_p. \tag{17.4}$$

Тогда в соответствии с последним равенством (17.1), имеем: $A_1 = h_{(1)}$,

$$B_1 = \frac{1}{2}[h_{(2)} - h_{(1)}^2], \quad C_1 = \frac{1}{6}[h_{(1)}^3 - 3h_{(1)}h_{(2)} + 2h_{(3)}].$$

Умножая выражение (17.4) последовательно на $h_m^k(x)$ и $h_n^m(x)$, получим:

$$h_{ik}^{(3p+1)} = (A_pA_1 + B_p)h_{ik}^{(2)} + (A_pB_1 + C_p)h_{ik} + A_pC_1g_{ik},$$

$$h_{ik}^{(3p+2)} = [A_1(A_pA_1 + B_p) + A_pB_1 + C_p]h_{ik}^{(2)} +$$
$$+[(A_pA_1 + B_p)B_1 + A_pC_1]h_{ik} + (A_pA_1 + B_p)C_1g_{ik}.$$

И, наконец, умножая последнее выражение еще раз на $h_{nk}(x)$, будем иметь:

$$h_{ik}^{(3p+3)} = [(A_1^3 + 2A_1B_1 + C_1)A_p + (A_1^2 + B_1)B_p + A_1C_p]h_{ik}^{(2)} +$$
$$+[(A_1^2B_1 + B_1^2 + A_1C_1)A_p + (A_1B_1 + C_1)B_p + B_1C_p]h_{ik} +$$
$$+[(A_1^2 + B_1)C_1A_p + A_1C_1B_p + C_1C_p]g_{ik}.$$

Сравнивая это соотношение с равенством (17.4), приходим к системе рекуррентных уравнений, определяющих коэффициенты A_p, B_p, C_p :

$$A_{p+1} = (A_1^3 + 2A_1B_1 + C_1)A_p + (A_1^2 + B_1)B_p + A_1C_p,$$

$$B_{p+1} = (A_1^2B_1 + B_1^2 + A_1C_1)A_p + (A_1B_1 + C_1)B_p + B_1C_p,$$

$$C_{p+1} = (A_1^2 + B_1)C_1A_p + A_1C_1B_p + C_1C_p.$$

Теорема 17.1 доказана.

Замечание. Систему рекуррентных уравнений (17.3) мы могли бы решить в общем виде, при произвольном значении $P \geq 1$. Однако получаемые выражения для коэффициентов A_p, B_p и C_p через инварианты $h_{(3)}$, $h_{(2)}$ и $h_{(1)}$ имеют очень громоздкий вид. Поэтому с практической точки зрения при заданном значении $P \geq 1$ коэффициенты A_p, B_p и C_p удобнее получать из системы рекуррентных уравнений (17.3) методом прогонки.

В случае антисимметричного тензора $h_{ik} = -h_{ki}$, инварианты $h_{(3)} = h_{(1)} = 0$ и решение рекуррентных уравнений (17.3) существенно упрощается: $C_p = 0$,

$$A_p = \frac{[1 + (-1)^p]}{2} \left(\frac{h_{(2)}}{2}\right)^{(3p-2)/2},$$

$$B_p = \frac{[1 - (-1)^p]}{2} \left(\frac{h_{(2)}}{2}\right)^{(3p-1)/2}.$$

Поэтому для антисимметричного тензора $h_{ik} = -h_{ki}$ из соотношений (17.2) имеем:

$$h_{ik}^{(3p)} = A_p h_{ik}^{(2)} + B_p h_{ik}, \quad h_{ik}^{(3p+1)} = B_p h_{ik}^{(2)} + A_p B_1 h_{ik},$$

$$h_{ik}^{(3p+2)} = A_p B_1 h_{ik}^{(2)} + B_p B_1 h_{ik}.$$

Следствие 17.1. Сворачивая индексы в соотношениях (17.2), получим выражения для инвариантов степеней $h_{(3p)}$, $h_{(3p+1)}$, $h_{(3p+2)}$ тензора h_{ik} через инварианты $h_{(1)}$, $h_{(2)}$, $h_{(3)}$ и их полиномы:

$$h_{(3p)} = A_p h_{(2)} + B_p h_{(1)} + 3C_p,$$

$$h_{(3p+1)} = (A_p A_1 + B_p) h_{(2)} + (A_p B_1 + C_p) h_{(1)} + 3A_p C_1,$$

$$h_{(3p+2)} = [A_p(A_1^2 + B_1) + B_pA_1 + C_p]h_{(2)} +$$
$$+[A_p(A_1B_1 + C_1) + B_pB_1]h_{(1)} + 3(A_pA_1 + B_p)C_1.$$

В случае антисимметричного тензора h_{ik} эти выражения принимают вид:

$$h_{(3p)} = A_ph_{(2)},\ h_{(3p+1)} = B_ph_{(2)},\ h_{(3p+2)} = A_pB_1h_{(2)}.$$

Замечание. Полученные нелинейные соотношения для тензоров второго ранга в трехмерных пространствах целесообразно использовать при решении различных задач в механике сплошных сред и в нелинейной акустике.

§ 18. Нелинейные тензорные соотношения в двумерном пространстве

Рассмотрим теперь случай двумерного пространства с метрическим тензором g_{ik}, где i и k могут принимать значения 1 и 2. Примерами таких пространств являются различные поверхности (оболочки и пластины) широко используемые в теоретической механике.

Выражение (11.1) в этом случае принимает вид:

$$h_{ik}^{(2)} = h_{ik}h_{(1)} + \frac{1}{2}g_{ik}[h_{(2)} - h_{(1)}^2]. \qquad (18.1)$$

Поэтому в двумерном пространстве все степени тензора $h_{ik}^{(P)}$ при $P \geq 2$ будут выражаться через первую $h_{ik}^{(1)} = h_{ik}$ и нулевую $h_{ik}^{(0)} = g_{ik}$ степени этого тензора и два независимых инварианта $h_{(1)}$ и $h_{(2)}$.

Найдем явный вид этих соотношений.

Теорема 18.1. В любом двумерном пространстве степени $h_{ik}^{(2P)}$ и $h_{ik}^{(2P+1)}$ произвольного тензора второго

ранга h_{ik} при $P \geq 1$ являются следующими комбинациями метрического тензора g_{ik} и тензора h_{ik} :

$$h_{ik}^{(2p)} = h_{ik}A_p + B_p g_{ik}, \tag{18.2}$$

$$h_{ik}^{(2p+1)} = h_{ik}[A_1 A_p + B_p] + B_1 A_p g_{ik},$$

где коэффициенты A_p и B_p представляют собой полиномы от инвариантов (скаляров) $h_{(2)}$ и $h_{(1)}$ этого тензора:

$$A_p = \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p-1}} \sum_{m=0}^{[(p-1)/2]} \frac{h_{(2)}^{p-2m-1} h_{(1)}^{2m+1} [2h_{(2)} - h_{(1)}^2]^m}{\Gamma(2m+2)\Gamma(p-2m)},$$

$$B_p = -\frac{h_{(1)}}{2} A_p + \frac{\Gamma(p+1)}{2^p} \sum_{m=0}^{[p/2]} \frac{h_{(2)}^{p-2m} h_{(1)}^{2m} [2h_{(2)} - h_{(1)}^2]^m}{\Gamma(2m+1)\Gamma(p-2m+1)}, \tag{18.3}$$

а $\Gamma(n)$ – гамма-функция.

Доказательство. Для удобства дальнейших расчетов введем обозначения:

$$A_1 = h_{(1)}, \qquad B_1 = \frac{1}{2}[h_{(2)} - h_{(1)}^2].$$

Обобщая равенство (18.1) на любую ($P \geq 1$) степень, можно записать:

$$h_{ik}^{(2p)} = h_{ik}A_p + B_p g_{ik}.$$

Умножая это соотношение на тензор $g^{mn}h_{nk}$ и учитывая равенство (18.1), получим:

$$h_{im}^{(2p+1)} = h_{im}[A_1 A_p + B_p] + B_1 A_p g_{im}.$$

Несложно построить следующую четную степень исходного тензора:

$$h_{ik}^{(2p+2)} = h_{ik}[(A_1^2 + B_1)A_p + A_1 B_p] + [A_1 B_1 A_p + B_1 B_p]g_{ik}. \tag{18.4}$$

Но в силу первой формулы (18.2), тензор степени $2p+2$ должен иметь вид:

$$h_{ik}^{(2p+2)} = h_{ik} A_{p+1} + B_{p+1} g_{ik}. \tag{18.5}$$

Сравнивая выражения (18.4) и (18.5), приходим к системе рекуррентных уравнений:

$$(A_1^2 + B_1)A_p + A_1 B_p = A_{p+1}, \quad A_1 B_1 A_p + B_1 B_p = B_{p+1}. \tag{18.6}$$

Формальные начальные условия для этой системы имеют вид: $A_0 = 0, \quad B_0 = 1$. Для решения этой системы построим производящие функции:

$$F_1(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p \xi^p}{p!}, \quad F_2(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p \xi^p}{p!}. \tag{18.7}$$

Система (18.6) может быть получена после подстановки производящих функций (18.7) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dF_1}{d\xi} = (A_1^2 + B_1)F_1(\xi) + A_1 F_2(\xi), \tag{18.8}$$

$$\frac{dF_2}{d\xi} = A_1 B_1 F_1(\xi) + B_1 F_2(\xi).$$

Решая систему (18.8) стандартным методом с начальными условиями $F_1(0) = 0$ и $F_2(0) = 1$, соответствующими условиям рекуррентной системы (18.6), будем иметь, вернувшись к инвариантам $h_{(1)}$ и $h_{(2)}$:

$$F_1(\xi) = \frac{[e^{\lambda_1\xi} - e^{\lambda_2\xi}]}{\sqrt{2h_{(2)} - h_{(1)}^2}}, \quad F_2(\xi) = -\frac{h_{(1)}F_1(\xi)}{2} + \frac{1}{2}[e^{\lambda_1\xi} + e^{\lambda_2\xi}],$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{h_{(2)}}{2} \pm \frac{h_{(1)}}{2}\sqrt{2h_{(2)} - h_{(1)}^2}.$$

Разложим полученное решение в бесконечные ряды по степеням ξ и сравним коэффициенты при одинаковых степенях ξ с коэффициентами исходных производящих функций (18.7). Тогда можно определить неизвестные коэффициенты A_p и B_p. В результате приходим к соотношениям (18.3). Теорема доказана.

Замечание. Используя формулы (18.2), можно при помощи формул (18.3) выразить любые степени произвольного тензора второго ранга h_{ik} в любом двумерном пространстве через сам этот тензор, метрический тензор g_{ik} и два независимых инварианта $h_{(1)}$, $h_{(2)}$.

В случае антисимметричного тензора $h_{ik} = -h_{ki}$, инвариант $h_{(1)} = 0$ и соотношения (18.3) существенно упрощаются: $A_p = 0$, $B_p = h_{(2)}^p/2^p$. Поэтому для антисимметричного тензора h_{ik} в двумерном пространстве справедливы соотношения:

$$h_{ik}^{(2p)} = \frac{g_{ik}h_{(2)}^p}{2^p}, \quad h_{ik}^{(2p+1)} = \frac{h_{ik}h_{(2)}^p}{2^p}.$$

Сворачивая индексы в соотношениях (18.2), получим выражения для инвариантов степеней $h_{(2p)}$, $h_{(2p+1)}$ тензора h_{ik} через инварианты $h_{(1)}$, $h_{(2)}$ и их полиномы (18.3):

$$h_{(2p)} = h_{(1)}A_p + 2B_p, \quad h_{(2p+1)} = h_{(2)}A_p + h_{(1)}B_p.$$

Для антисимметричного тензора из этих выражений имеем:

$$h_{(2p)} = \frac{h^p_{(2)}}{2^{p-1}}, \quad h_{(2p+1)} = 0.$$

Таким образом, в двумерном пространстве соотношения для степеней антисимметричного тензора принимают наиболее простой вид.

ГЛАВА 5
ТЕНЗОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 19. Основы механики сплошных сред

Описание движения частиц в классической механике производится на основе понятия о материальной точке – некоторого бесконечно малого тела, обладающего массой. Решая уравнения движения для этой точки в различных силовых полях, удается исследовать законы движения механических систем, состоящих из небольшого числа материальных тел или частиц. Однако при переходе к системам, содержащим большое количество частиц, такой подход оказывается неприменимым.

Как известно, в одном кубическом сантиметре вещества содержится чрезвычайно большое число $N \sim 10^{19}$ молекул. Поэтому для детального описания движения всех частиц вещества необходимо решить более 10^{19} уравнений движения, что невозможно. Вместе с тем, задачи о движении твердых тел, потоков жидкостей и газов имеют большой практический интерес.

Для решения таких задач был создан специальный раздел классической механики – механика сплошных сред [3,4]. В механике сплошных сред движение большого числа микроскопических объектов – молекул среды – описывают усредненными величинами.

Центральным понятием при таком подходе является понятие физически бесконечно малой частицы (или просто, частицы). Частицей в механике сплошных сред называют совокупность молекул вещества, число которых, с одной стороны, достаточно велико по сравнению с единицей, а с другой стороны, весьма мало по сравнению с числом молекул в рассматриваемой механической системе. Объем, занимаемый этой частицей, также должен быть мал по сравнению с объемом, занимаемым всей рассматриваемой механической системой, которую в этом случае называют сплошной средой.

Описание движения частиц сплошной среды проводят на основе полевого подхода: задают все физические величины, характеризующие состояние сплошной среды, как функции точки пространства и времени. Поэтому в механике сплошных сред интересуются полем скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r},\ t)$, описывающем распределение скоростей частиц в пространстве и их зависимостью от времени, а также распределением плотности вещества в пространстве и ее зависимостью от времени $\rho = \rho(\mathbf{r},\ t)$.

Обычно для построения уравнений механики сплошных сред используются декартовы координаты инерциальной системы отсчета евклидова пространства с метрическим тензором

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19.1}$$

Символы Кристоффеля в этом случае равны нулю, в результате чего все соотношения и уравнения имеют очень простой вид. Однако использование декартовых коорди-

нат и метрического тензора (19.1) значительно ограничивает область применимости полученных уравнений и соотношений, не позволяя, например, использовать их без каких-либо изменений в случае произвольных криволинейных координат. Поэтому в этой главе, за редким исключением, мы будем полагать, что метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ является полностью произвольным и символы Кристоффеля, построенные с его помощью, не равны нулю.

Так как используемые при этом криволинейные координаты не обязательно будут ортогональными, то все формулы этой главы будут содержать не физические компоненты, как это обычно делается, а геометрические компоненты (см. задачу в конце этого параграфа). Это, в частности, означает, что квадрат некоторого вектора B^α в общем случае не будет равен сумме квадратов его компонент, а будет определяться выражением:

$$\mathbf{B}^2 = g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = g^{\alpha\beta}B_\alpha B_\beta = B^\alpha B_\alpha. \qquad (19.2)$$

Преимуществом использования геометрических компонент векторов является то, что они могут быть определены во всех системах координат, в то время как физические компоненты вектора могут быть введены только в ортогональных системах координат.

Следует также отметить, что в произвольных криволинейных системах координат аппарат ковариантного (абсолютного) дифференцирования применим только к геометрическим компонентам векторов и, вообще, тензоров.

Задача

Выразить геометрические компоненты трехмерного вектора

через его физические компоненты в произвольной криволинейной, но ортогональной системе координат.

Решение. Рассмотрим некоторый вектор B^α. Его геометрические компоненты $B^\alpha = \{B^1, B^2, B^3\}$, $B_\beta = \{B_1, B_2, B_3\}$ связаны соотношениями $B^\alpha = g^{\alpha\beta}B_\beta$, $B_\alpha = g_{\alpha\beta}B^\beta$. Квадрат вектора B^α в любых системах координат определяется соотношением (19.2).

Физические компоненты вектора можно ввести только в ортогональных системах координат, в которых метрический тензор диагонален. При использовании физических компонент векторов не делается различия между ковариантными и контравариантными индексами: $\tilde{B}^\alpha = \tilde{B}_\alpha = \{\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3\}$.

Квадрат вектора в ортогональных системах координат равен сумме квадратов его физических компонент: $\tilde{\mathbf{B}}^2 = (\tilde{B}_1)^2 + (\tilde{B}_2)^2 + (\tilde{B}_3)^2$. В ортогональных системах координат квадрат вектора в геометрических компонентах определяется соотношением:

$$\mathbf{B}^2 = g^{11}(B_1)^2 + g^{22}(B_2)^2 + g^{33}(B_3)^2 =$$

$$= g_{11}(B^1)^2 + g_{22}(B^2)^2 + g_{33}(B^3)^2.$$

Тогда из равенства $\mathbf{B}^2 = \tilde{\mathbf{B}}^2$, несложно получить:

$$\tilde{B}^1 = \tilde{B}_1 = \sqrt{|g^{11}|}B_1 = \sqrt{|g_{11}|}B^1,$$

$$\tilde{B}^2 = \tilde{B}_2 = \sqrt{|g^{22}|}B_2 = \sqrt{|g_{22}|}B^2,$$

$$\tilde{B}^3 = \tilde{B}_3 = \sqrt{|g^{33}|}B_3 = \sqrt{|g_{33}|}B^3.$$

Отсюда следует, что

$$B^\alpha = \sqrt{|g^{\alpha\alpha}|}\tilde{B}_\alpha = \sqrt{|g^{\alpha\alpha}|}\tilde{B}^\alpha, \qquad (1)$$

$$B_\alpha = \sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}\tilde{B}_\alpha = \sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}\tilde{B}^\alpha,$$

причем в правых частях этих выражений суммирование по индексу α не производится.

§ 20. Тензор деформации сплошной среды

Рассмотрим некоторую сплошную среду и выделим в ней какие-либо две бесконечно близкие точки, радиус-вектор между которыми обозначим, как обычно, через $dx^\alpha = \{dx^1, dx^2, dx^3\}$. Под действием приложенных сил сплошная среда деформируется, в результате чего меняются расстояния между ее точками. Поэтому после деформирования радиус-вектор между рассматриваемыми бесконечно близкими точками изменится и станет равным

$$dx'^\alpha = dx^\alpha + Du^\alpha, \tag{20.1}$$

где символом D обозначен абсолютный (ковариантный) дифференциал, а u^α – вектор деформации (вектор смещения).

Так как вектор деформации является функцией точки, то выражение (20.1) можно записать в виде:

$$dx'^\alpha = dx^\alpha + \nabla_\beta u^\alpha dx^\beta.$$

Квадрат расстояния между рассматриваемыми бесконечно близкими точками до деформации равен $dl^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, а после деформации

$$dl'^2 = g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = dl^2 + 2\nabla_\beta u_\alpha dx^\beta dx^\alpha + \tag{20.2}$$
$$+ g_{\alpha\beta} \nabla_\nu u^\alpha \nabla_\mu u^\beta dx^\nu dx^\mu.$$

Если ввести симметричный тензор

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha + g^{\mu\nu} \nabla_\alpha u_\mu \nabla_\beta u_\nu], \tag{20.3}$$

то выражение (20.2) можно переписать в виде:

$$dl'^2 = [g_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}]dx^\alpha dx^\beta.$$

Тензор $u_{\alpha\beta}$ в научной литературе получил наименование тензора деформации сплошной среды.

Изменение расстояния между двумя бесконечно близкими точками Δl в результате деформации имеет вид

$$\Delta l = dl' - dl = \sqrt{(g_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta} - \sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta l}{dl} = \sqrt{1 + u_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta} - 1, \tag{20.4}$$

где $n^\alpha = dx^\alpha/dl$ – единичный вектор ($g_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = 1$), направленный вдоль вектора dx^α.

Таким образом, зная тензор деформации $u_{\alpha\beta}$, можно определить относительное удлинение между любыми бесконечно близкими точками сплошной среды.

В случае малых деформаций, когда модуль максимальной по величине компоненты тензора $u_{\alpha\beta}$ значительно меньше модуля максимальной компоненты $g_{\alpha\beta}$, из выражения (20.4) в линейном приближении получим:

$$\frac{\Delta l}{dl} = \frac{1}{2}u_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta,$$

причем в этом приближении тензор деформации имеет вид:

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha]. \tag{20.5}$$

Такие деформации называются малыми.

Задачи

1. Считая деформации малыми, записать выражения (20.5) для геометрических компонент тензора деформации $u_{\alpha\beta}$ в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат евклидова пространства.

Решение.

а) В декартовых координатах $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ имеет вид (19.1) и все компоненты символов Кристоффеля равны нулю. Поэтому из выражения (20.5) мы имеем:

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad u_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right],$$

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad u_{xz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right], \quad u_{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right].$$

Так как метрический тензор в декартовых координатах имеет вид (19.1), то в силу соотношений (1) задачи § 19 физические компоненты тензора смещений совпадают с геометрическими компонентами. Поэтому выражения для тензора деформации в декартовых координатах в геометрических и физических компонентах совпадают.

б) В цилиндрических координатах $x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z$, метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ (см. задачу 2 § 3) имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и отличными от нуля компонентами символов Кристоффеля являются (см. задачу § 6)

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}.$$

Учитывая, что

$$\nabla_\beta u_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} u_\nu, \tag{1}$$

из соотношения (20.5) получим:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{2u_\varphi}{r}\right], \tag{2}$$

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r u_r, \qquad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$u_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right], \quad u_{rz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right].$$

в) В сферических координатах $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$, метрический тензор имеет вид:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2\sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

и отличными от нуля компонентами символов Кристоффеля являются:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Учитывая, что

$$\nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} u_\nu,$$

из равенства (20.5) будем иметь:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\theta \sin\theta\cos\theta + r u_r \sin^2\theta, \tag{3}$$

$$u_{\theta\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + r u_r, \quad u_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] - \frac{u_\theta}{r},$$

$$u_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\right] - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} u_\varphi,$$

$$u_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right] - \frac{u_\varphi}{r}.$$

Следует еше раз подчеркнуть, что полученные формулы связывают геометрические компоненты тензора деформации $u_{\alpha\beta}$ с геометрическими компонентами вектора смещения u_α.

2. Используя результаты предыдущей задачи, записать выражения для физических компонент тензора деформации через физические компоненты вектора смещения в цилиндрических и сферических координатах.

Решение. а) В цилиндрических координатах $x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z$. Обобщая связь между физическими и геометрическими компонентами вектора (см. задачу § 19) в ортогональных системах координат на случай тензора

$$\tilde{u}_{\alpha\beta} = \sqrt{g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta}} u_{\alpha\beta},$$

где суммирования по индексам α и β не производится, найдем:

$$\tilde{u}_{rr} = u_{rr}, \quad \tilde{u}_{zz} = u_{zz}, \quad \tilde{u}_{\varphi\varphi} = \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}, \tag{1}$$

$$\tilde{u}_{\varphi r} = \frac{u_{\varphi r}}{r}, \quad \tilde{u}_{\varphi z} = \frac{u_{\varphi z}}{r}, \quad \tilde{u}_{rz} = u_{rz}.$$

Выразим теперь геометрические компоненты вектора смещения u_α через его физические компоненты:

$$u_r = \tilde{u}_r, \quad u_\varphi = r\tilde{u}_\varphi, \quad u_z = \tilde{u}_z.$$

Подставляя эти выражения в соотношения (2) предыдущей задачи и используя равенства (1), получим:

$$\tilde{u}_{rr} = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r}, \quad \tilde{u}_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{r}\right],$$

$$\tilde{u}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_r}{r}, \qquad \tilde{u}_{zz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z},$$

$$\tilde{u}_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi}\right], \quad \tilde{u}_{rz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r}\right].$$

б) В сферических координатах $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$. Поступая аналогично случаю цилиндрических координат, найдем связь между физическими и геометрическими компонентами тензора деформации:

$$\tilde{u}_{rr} = u_{rr}, \quad \tilde{u}_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}, \quad \tilde{u}_{\varphi\varphi} = \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2\theta}, \tag{2}$$

$$\tilde{u}_{\varphi r} = \frac{u_{\varphi r}}{r\sin\theta}, \quad \tilde{u}_{\varphi\theta} = \frac{u_{\varphi\theta}}{r^2\sin\theta}, \quad \tilde{u}_{r\theta} = \frac{u_{r\theta}}{r}.$$

Выразим теперь геометрические компоненты вектора смещения u_α через его физические компоненты:

$$u_r = \tilde{u}_r, \quad u_\theta = r\tilde{u}_\theta, \quad u_\varphi = r\sin\theta\tilde{u}_\varphi.$$

Подставляя эти выражения в соотношения (3) предыдущей задачи и используя равенства (2), получим:

$$\tilde{u}_{rr} = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r}, \quad \tilde{u}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \cos\theta\tilde{u}_\theta\right] + \frac{\tilde{u}_r}{r},$$

$$\tilde{u}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{u}_r\right], \quad \tilde{u}_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\theta}{r}\right],$$

$$\tilde{u}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2r\sin\theta}\left[\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\varphi} + \sin\theta\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial\theta} - \cos\theta\tilde{u}_\varphi\right],$$

$$\tilde{u}_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\tilde{u}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\varphi} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{r}\right].$$

§ 21. Тензор напряжений

При деформировании сплошной среды изменяется расстояние между молекулами среды, что приводит к нарушению состояния равновесия, в котором находилась среда до деформации. В результате в сплошной среде возникают силы, которые стремятся вернуть эту среду в исходное состояние. Эти внутренние силы в научной литературе получили наименование внутренних напряжений.

Обычно сплошные среды состоят из молекул с весьма малым радиусом действия межмолекулярных сил. Поэтому силы, с которыми они действуют на рассматриваемую частицу среды, оказываются сосредоточенными в очень тонком поверхностном слое, окружающем частицу, т.е. являются поверхностными силами. Это означает, что силу внутреннего напряжения F_α можно представить в виде трехмерной ковариантной дивергенции от некоторого тензора $\sigma^{\alpha\beta}$:

$$F^\alpha = \nabla_\beta\sigma^{\alpha\beta}. \tag{21.1}$$

Тензор $\sigma^{\alpha\beta}$ в научной литературе получил наименование тензора напряжений.

Выясним физический смысл этого тензора. Для этого проинтегрируем соотношение (21.1) по достаточно малому объему δV, такому, чтобы интегрирование вектора

имело смысл:

$$\int\limits_{\delta V} dV F^{\alpha} = \int\limits_{\delta V} dV \nabla_{\beta} \sigma^{\alpha\beta}.$$

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\int\limits_{\delta V} dV F^{\alpha} = \int\limits_{S} dS_{\beta} \sigma^{\alpha\beta},$$

где S – поверхность, ограничивающая объем δV, $dS_{\beta} = n_{\beta} dS$ – элемент поверхности, а n_{β} – единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Из этого выражения следует, что компонента $\sigma^{\alpha\beta}$ тензора напряжений совпадает с α-ой компонентой силы, действующей на единицу поверхности, нормальной к оси x^{β}.

Тензор напряжений соотношением (21.1) не определяется однозначно. Несложно убедиться, что если от тензора $\sigma^{\alpha\beta}$ отнять тензор $\nabla_{\nu}\mu^{\alpha\beta\nu} = -\nabla_{\nu}\mu^{\alpha\nu\beta}$ антисимметричный по последним двум индексам, то полученный тензор

$$\sigma'^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} - \nabla_{\nu}\mu^{\alpha\beta\nu} \tag{21.2}$$

в евклидовом пространстве будет удовлетворять тому же соотношению (21.1), что и тензор $\sigma^{\alpha\beta}$:

$$F^{\alpha} = \nabla_{\beta}\sigma'^{\alpha\beta} = \nabla_{\beta}\sigma^{\alpha\beta}.$$

Действительно, так как в евклидовом пространстве тензор кривизны $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$, то ковариантные производные второго порядка можно переставлять местами. Тогда в

силу свойства антисимметрии тензора $\mu^{\alpha\beta\nu} = -\mu^{\alpha\nu\beta}$ при перестановке последних двух индексов будем иметь:

$$\nabla_\beta \nabla_\nu \mu^{\alpha\beta\nu} = 0.$$

Неоднозначность (21.2) в определении тензора $\sigma^{\alpha\beta}$ можно использовать для наложения на него дополнительных условий. Обычно выбор тензора $\nabla_\nu \mu^{\alpha\beta\nu}$ производят так, чтобы тензор напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ был симметричным тензором: $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha}$.

Из термодинамики следует, что тензор напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ можно получить, если термодинамический потенциал F, называемый свободной энергией, продифференцировать по компонентам тензора деформации $u_{\alpha\beta}$:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\beta}}\right)_T. \tag{21.3}$$

Знак T, стоящий в правой части этого равенства, означает, что дифференцирование свободной энергии F следует проводить, полагая температуру T постоянной.

§ 22. Тензорные уравнения движения в механике сплошных сред

В классической механике уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ – сила, действующая на рассматриваемую материальную точку, m – ее масса.

При переходе к механике сплошных сред это уравнение записывается для частицы среды, занимающей малый объем ΔV. В результате уравнение изменения импульса принимает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ – суммарная плотность сил, действующих на частицу.

Так как вектор $\mathbf{v}$, входящий в это уравнение, является функцией координат и времени, то d/dt – полная (субстанциальная) производная:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Плотность сил $\mathbf{F}$ представляет собой сумму внутренних сил, действующих со стороны молекул и атомов, окружающих рассматриваемую частицу, и внешних, по отношению к среде, сил.

Внутренние силы, как уже указывалось, являются поверхностными силами и в соответствии с равенством (21.1) могут быть выражены через тензор напряжений.

Внешние силы практически одинаково действуют внутри объема частицы и являются поэтому объемными силами.

В результате уравнение изменения импульса принимает вид тензорного уравнения:

$$\rho \frac{dv^\alpha}{dt} = \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} + \rho f^\alpha, \tag{22.1}$$

где $\sigma^{\alpha\beta}$ – тензор напряжений, f^α – плотность внешних сил, приходящихся на единицу массы.

Кроме уравнения изменения импульса (22.1) в механике сплошных сред используется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_\beta \left(\rho v^\beta\right) = 0 \tag{22.2}$$

и уравнение для плотности внутренней энергии Π :

$$\rho \frac{d\Pi(\mathbf{r}, t)}{dt} = \sigma^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} - \nabla_\beta q^\beta, \tag{22.3}$$

где q^α – плотность потока тепла, а тензор $V_{\alpha\beta}$ в научной литературе получил наименование тензора скоростей деформаций среды:

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha\right]. \tag{22.4}$$

Уравнения (22.1) – (22.4) представляют собой основные уравнения механики сплошных сред. Однако система уравнений (22.1) – (22.4) является незамкнутой: число неизвестных, входящих в эту систему, меньше числа уравнений. Для замыкания системы уравнений (22.1) – (22.4) к ней обычно добавляют уравнение состояния, конкретизирующее вид среды, и термодинамическое уравнение, описывающее изменение энтропии s :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla_\alpha q^\alpha + D, \tag{22.5}$$

где T – абсолютная температура, D – диссипативная функция, равная механической работе, необратимо переходящей в тепло, в единице объема и в единицу времени.

Важным частным случаем сплошной среды является идеальная жидкость. В частности, если можно пренебречь теплопроводностью сплошной среды и недиагональными компонентами тензора напряжений, записав его в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = -pg^{\alpha\beta},$$

где p – изотропное давление, то получим уравнения движения идеальной жидкости:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_\beta\left(\rho v^\beta\right) = 0, \tag{22.6}$$

$$\rho g_{\alpha\beta}\frac{dv^\beta}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \rho f_\alpha,$$

$$\rho\frac{d\Pi}{dt} = -p\nabla_\beta v^\beta.$$

Если эту систему дополнить уравнениями

$$\Pi = \Pi(\rho, T), \quad p = p(\rho, T),$$

которые можно получить с привлечением термодинамики, то система становится замкнутой.

Уравнения для идеальной жидкости заметно упрощаются, если жидкость можно считать несжимаемой, т.е. если ее плотность массы ρ в широком диапазоне изменения давления p остается постоянной: $\rho = \rho_0$. Тогда система уравнений (22.6) оказывается замкнутой и принимает вид:

$$\nabla_\beta v^\beta = 0, \qquad \frac{d\Pi}{dt} = 0,$$

$$\rho_0 g_{\alpha\beta}\frac{dv^\beta}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \rho_0 f_\alpha.$$

При использовании декартовых координат все операторы ковариантного дифференцирования ∇_β, входящие в уравнения механики сплошных сред, следует заменить на операторы частного дифференцирования по соответствующей координате x^β.

§ 23. Тензорные уравнения теории упругости

В механике сплошных сред твердым телом называется среда, у которой сопротивление сдвигу при независящих от времени деформациях сколь угодно долго остается не равным нулю. Важным частным случаем твердых тел является идеально упругое твердое тело, у которого напряжения в любой точке пространства и в любой момент времени зависят от деформаций в той же точке и в тот же момент времени.

Свободную энергию F упругого тела при малых деформациях $u_{\alpha\beta}$ и постоянной температуре T можно разложить в ряд по степеням тензора $u_{\alpha\beta}$:

$$F = F_0 + \lambda^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} + \lambda^{\alpha\beta\mu\nu} u_{\alpha\beta} u_{\mu\nu}. \tag{23.1}$$

Используя соотношение (21.3), найдем тензор напряжений

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda^{\alpha\beta} + 2\lambda^{\alpha\beta\mu\nu} u_{\mu\nu}.$$

Если предположить, что в недеформированном упругом теле (т.е. при $u_{\mu\nu} = 0$) тензор напряжений должен быть равен нулю, то необходимо потребовать, чтобы $\lambda^{\alpha\beta} = 0$. В этом случае соотношение (23.1) принимает вид:

$$F = F_0 + \lambda^{\alpha\beta\mu\nu} u_{\alpha\beta} u_{\mu\nu}, \tag{23.2}$$

где тензор четвертого ранга $\lambda^{\alpha\beta\mu\nu}$ называется тензором модулей упругости.

Изучим свойства этого тензора. В общем случае тензор четвертого ранга содержит $3^4 = 81$ компоненту. Однако не все из этих компонент входят в выражение (23.2), так как после суммирования по α, β, μ и ν в правой части выражения останется только часть компонент, удовлетворяющая определенным условиям симметрии. Найдем эти условия. Отметим, во-первых, что из-за симметрии тензора деформаций $u_{\alpha\beta} = u_{\beta\alpha}$ в выражении (23.2) останется только та часть тензора $\lambda^{\alpha\beta\mu\nu}$, которая симметрична относительно перестановки индексов внутри двух пар α, β и μ, ν :

$$\lambda^{\alpha\beta\mu\nu} = \lambda^{\beta\alpha\mu\nu} = \lambda^{\alpha\beta\nu\mu}. \tag{23.3}$$

И, во-вторых, этот тензор симметричен относительно перестановки этих двух пар:

$$\lambda^{\alpha\beta\mu\nu} = \lambda^{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{23.4}$$

Несложный расчет показывает, что в трехмерном пространстве у тензора четвертого ранга, удовлетворяющего условиям (23.3) и (23.4), независимыми являются 21 компонента. Подставляя выражение (23.2) в определение (21.3), получим

$$\sigma^{\alpha\beta} = 2\lambda^{\alpha\beta\mu\nu} u_{\mu\nu}.$$

Такая связь между тензором напряжений и тензором деформаций характерна для кристаллов, у которых механические свойства сильно зависят от выделенных направлений, появляющихся из-за анизотропного строения кристаллической решетки. Однако и в этом случае наличие той или иной симметрии в строении кристалла приводит к появлению дополнительных зависимостей между

компонентами тензора $\lambda^{\alpha\beta\mu\nu}$, так что число его независимых компонент оказывается меньше, чем 21.

Важным частным случаем упругого тела является изотропное тело, у которого нет выделенных направлений в проявлении упругих свойств. Тензор $\lambda^{\alpha\beta\mu\nu}$ у изотропного тела также должен демонстрировать отсутствие выделенных направлений в пространстве и быть универсальным. Поэтому тензор $\lambda^{\alpha\beta\mu\nu}$ должен быть построен из метрического тензора $g^{\alpha\beta}$, который является единственным универсальным тензором пространства.

Используя метрический тензор $g^{\alpha\beta}$, можно построить два тензора четвертого ранга, удовлетворяющих условиям симметрии (23.3) и (23.4)

$$\lambda_1^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\right], \quad \lambda_2^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}.$$

Взяв линейную комбинацию этих тензоров, получим

$$\lambda^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\mu}{2}\left[g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\right] + \frac{\lambda}{2}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}.$$

Коэффициенты λ и μ, входящие в это выражение, называются коэффициентами Ламэ.

В результате свободная энергия (23.2) для изотропного упругого тела принимает вид

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}u_{(1)}^2 + \mu u_{(2)}, \tag{23.5}$$

где $u_{(1)} = u_\alpha^\alpha$, $u_{(2)} = u^{\alpha\beta}u_{\beta\alpha}$.

Всякую деформацию можно представить в виде суммы двух деформаций: деформации сдвига, при которой

объем тела остается неизменным, а меняется только его форма, и деформации всестороннего сжатия, когда форма тела не изменяется, а изменяется его объем

$$u_{\alpha\beta} = \left[u_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}u_{(1)}\right] + \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}u_{(1)}.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, описывает деформацию сдвига, а последний член – деформацию всестороннего сжатия.

Для того, чтобы подчеркнуть выделенность этих деформаций, свободную энергию (23.5) иногда записывают в виде

$$F = F_0 + \mu\left[u_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}u_{(1)}\right]\left[u^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}u_{(1)}\right] + \frac{K}{2}u_{(1)}^2,$$

где коэффициент μ называют модулем сдвига, а $K = \lambda + 2\mu/3$ – модулем всестороннего сжатия.

Тензор напряжений изотропного упругого тела также можно записать, явно выделив две независимые деформации

$$\sigma^{\alpha\beta} = Kg^{\alpha\beta}u_{(1)} + 2\mu\left[u^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}u_{(1)}\right].$$

При малых смещениях $\mathbf{u}$ в упругом теле скорость его частиц $\mathbf{v}$ выражается через $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Полагая и скорости частиц упругого тела малыми, получим

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{dt} = \frac{\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}.$$

Поэтому для упругого тела, при малых изменениях его плотности, уравнение изменения импульса принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} + \rho_0 f^\alpha, \tag{23.6}$$

где ρ_0 – плотность упругого тела в отсутствие действия сил.

Уравнение непрерывности в этом случае можно записать в виде

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\nabla_\beta u^\beta, \tag{23.7}$$

позволяющем по известной зависимости $u^\beta(x^1, x^2, x^3, t)$ определить $\rho = \rho(x^1, x^2, x^3, t)$ упругого тела.

И, наконец, уравнение для изменения энергии $\Pi = F/\rho_0 + Ts$ упругого тела принимает вид

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = \sigma^{\alpha\beta} \frac{du_{\alpha\beta}}{dt} + \rho T \frac{ds}{dt}. \tag{23.8}$$

Уравнения (23.6) – (23.8) представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающую движение частиц идеально упругого тела. Важными частными случаями этих уравнений являются уравнения, описывающие равновесие упругого тела, когда $\partial^2 u^\alpha(\mathbf{r}, t)/\partial t^2 = 0$, и уравнения упругих колебаний, когда $\partial^2 u^\alpha(\mathbf{r}, t)/\partial t^2 \neq 0$.

Задача

Найти вектор деформации упругого шара радиуса R, находящегося в статическом состоянии под действием собственного гравитационного поля с объемной силой $\mathbf{f} = -\rho_0 g \mathbf{r}/R$, где g – ускорение свободного падения на поверхности шара.

Решение. Уравнение изменения импульса (23.6) в случае статики принимает вид:

$$\nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} + \rho_0 f^\alpha = 0. \tag{1}$$

Используя соотношения (23.5) и (21.3), выразим тензор напряжений через тензор деформации:

$$\sigma^{\alpha\beta} = 2\mu u^{\alpha\beta} + \lambda g^{\alpha\beta} u_{(1)}.$$

Так как сила гравитации действует на шар сферически симметрично, то вектор деформации в сферической системе координат будет иметь отличной от нуля только радиальную компоненту u_r, которая должна быть функцией только $r : u_r = u_r(r)$.

В этом случае формулы (3) задачи 1 § 20 примут вид:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = r u_r, \quad u_{\varphi\varphi} = r u_r \sin^2\theta.$$

Учитывая, что

$$u_{(1)} = g^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r} u_r,$$

найдем отличные от нуля компоненты тензора напряжений:

$$\sigma^{rr} = (2\mu + \lambda)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} u_r, \ \sigma^{\theta\theta} = \frac{\lambda}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2(\mu+\lambda)}{r^3} u_r,$$

$$\sigma^{\varphi\varphi} = \frac{\lambda}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2(\mu+\lambda)}{r^3 \sin^2\theta} u_r. \tag{2}$$

В силу выражения

$$\nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\beta_{\beta\nu}\sigma^{\nu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\sigma^{\beta\nu}$$

и соотношений (4) задачи § 6, имеем:

$$\nabla_\beta \sigma^{r\beta} = \frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma^{rr} - r\sigma^{\theta\theta} - r\sin^2\theta\sigma^{\varphi\varphi},$$

$$\nabla_\beta \sigma^{\theta\beta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sigma^{\theta\theta} - \sin\theta\cos\theta\sigma^{\varphi\varphi}, \quad \nabla_\beta \sigma^{\varphi\beta} = 0.$$

Подставляя равенства (2) в эти соотношения, получим только одно нетривиальное выражение из уравнения $\nabla_\beta \sigma^{r\beta} = 0$:

$$(2\mu+\lambda)\left[\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{2}{r^2}u_r\right] = (2\mu+\lambda)\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2u_r\right]\right\}.$$

В результате уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2u_r\right]\right\} = \frac{\rho_0 g r}{(2\mu+\lambda)R}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем:

$$u_r = \frac{\rho_0 g r^3}{10(2\mu+\lambda)R} + c_1 r + \frac{c_2}{r^2}.$$

Для определения констант интегрирования c_1 и c_2 воспользуемся двумя условиями, которые естественным образом вытекают из постановки задачи: вектор смещения u_r в центре шара из-за сферической симметрии действия гравитационной силы должен быть равен нулю и, кроме того, компонента σ^{rr} тензора напряжений на поверхности шара должна обращаться в нуль. Первое из этих условий требует, чтобы $c_2 = 0$, а из второго следует, что

$$c_1 = -\frac{(6\mu+5\lambda)\rho_0 g R}{10(2\mu+\lambda)(2\mu+3\lambda)}.$$

Таким образом, имеем окончательно:

$$u_r = \frac{\rho_0 g R}{10(2\mu+\lambda)}\left[\frac{r^3}{R^2} - \frac{(6\mu+5\lambda)r}{(2\mu+3\lambda)}\right], \quad u_\theta = u_\varphi = 0.$$

§ 24. Тензорные уравнения движения вязкой жидкости

Использование модели идеальной жидкости позволяет решать широкий круг задач. Однако эта модель является достаточно грубой, в результате чего ее решения не в полной мере отражают процессы, происходящие в сплошных средах. Классическим примером в этом смысле является парадокс Даламбера, когда решение задачи о движении сферы в идеальной жидкости приводит к утверждению об отсутствии сопротивления движению сферы. Этот результат является следствием пренебрежения недиагональными компонентами тензора напряжений, описывающими касательные напряжения, по сравнению с диагональными компонентами этого тензора.

Поэтому при решении ряда задач механики сплошных сред необходимо использовать модель вязкой жидкости, т.е. среды, в которой тензор напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ имеет не равные нулю недиагональные компоненты. В декартовых координатах тензор $\sigma^{\alpha\beta}$ записывают в виде, предложенном еще Ньютоном:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}, \tag{24.1}$$

где $\tau^{\alpha\beta}$ является функцией производных от скорости по координатам:

$$\tau_{\alpha\beta} = \eta\left[\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha - \frac{2}{3} g_{\alpha\beta}\nabla_\nu v^\nu\right] + \xi g_{\alpha\beta}\nabla_\nu v^\nu. \tag{24.2}$$

Скалярные величины η и ξ, входящие в выражение (24.2), называют первым и, соответственно, вторым коэффициентами вязкости. Обычно предполагается, что эти коэффициенты зависят только от плотности сплошной среды и ее температуры. Среда, для которой тензор напряжения определяется выражениями (24.1) и (24.2), называется линейной вязкой жидкостью, так как тензор $\tau_{\alpha\beta}$ линейно зависит от тензора скоростей деформаций (22.4).

Подставляя выражения (24.1) и (24.2) в уравнение (22.1), можно получить уравнение изменения импульса вязкой жидкости:

$$\rho g_{\alpha\beta}\frac{dv^\beta}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + g^{\beta\nu}\nabla_\beta\left\{\eta\left[\nabla_\nu v_\alpha + \nabla_\alpha v_\nu\right]\right\} + \tag{24.3}$$

$$+\nabla_\alpha\left\{\left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right)\nabla_\nu v^\nu\right\} + \rho f_\alpha.$$

Тензорное уравнение (24.3) изменяет свой вид при инверсии времени $t \to -t$, $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$, причем в нем изменяют знак только члены, связанные с тензором $\tau_{\alpha\beta}$, а остальные члены уравнения (24.3) сохраняют свой знак. Это означает, что уравнение (24.3) описывает необратимые процессы, при которых происходит переход части механической энергии в тепловую (диссипация энергии). Подставляя выражения (24.1) и (24.2) в уравнение (22.3), получим тензорное уравнение изменения энергии вязкой жидкости:

$$\rho\frac{d\Pi}{dt} = -p\nabla_\alpha v^\alpha + D - \nabla_\alpha q^\alpha, \tag{24.4}$$

где D – диссипативная функция, которая в рассматриваемом случае может быть записана в виде:

$$D = \tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_\alpha > 0.$$

Для замыкания системы уравнений (24.3) и (24.4) к ним необходимо добавить уравнение изменения энтропии s вязкой жидкости

$$\rho\, T\frac{ds}{dt} = D - \nabla_\alpha q^\alpha,$$

уравнения состояния $p = p(\rho, t)$, $\Pi = \Pi(\rho, t)$, уравнение непрерывности (22.2), а также закон Фурье

$$q^\alpha = -\kappa \nabla_\alpha T,$$

где κ – коэффициент теплопроводности, который зависит от плотности среды и температуры.

Уравнение изменения импульса (24.3) вязкой жидкости упрощается, если входящие в него коэффициенты вязкости η и ξ можно считать постоянными для данной среды величинами. В декартовых координатах оно принимает вид:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta\Delta\, \mathbf{v} + (\frac{\eta}{3} + \xi)\nabla div\ \mathbf{v} + \rho\mathbf{f}.$$

Это уравнение в научной литературе получило название уравнения Навье – Стокса.

Задача

Вдоль цилиндрической трубы радиуса R под действием перепада давлений, равного p_1/L на каждую единицу длины трубы, течет несжимаемая вязкая жидкость. Течение установившееся, ламинарное. Внешние объемные силы отсутствуют. Определить количество жидкости, протекающей за единицу времени через поперечное сечение трубы.

Решение. Так как движение жидкости установившееся $(dv_\alpha/dt = 0)$ и объемные силы отсутствуют $(f_\alpha = 0)$, то уравнение (24.3) в случае несжимаемой жидкости $(\nabla_\beta v^\beta = 0)$ примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = \eta g^{\beta\nu}\nabla_\beta[\nabla_\nu v_\alpha + \nabla_\alpha v_\nu]. \qquad (1)$$

Используя правила ковариантного дифференцирования, запишем уравнение (1) через частные производные:

$$\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = \eta g^{\beta\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big\{\frac{\partial v_\nu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\nu} - 2\Gamma^\sigma_{\alpha\nu}v_\sigma\Big\} -$$

$$-g^{\beta\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Big\{\frac{\partial v_\nu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x^\nu} - 2\Gamma^\tau_{\sigma\nu}v_\tau\Big\} -$$

$$-g^{\beta\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Big\{\frac{\partial v_\sigma}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\sigma} - 2\Gamma^\tau_{\sigma\alpha}v_\tau\Big\}.$$

Вводя цилиндрические координаты (см. задачи § 3 и § 6) и полагая, что в силу симметрии задачи

$$v_r = v_\varphi = 0, \quad v_z = v_z(r), \quad p = p(z),$$

это уравнение приведем к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta\Big\{\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big\} = \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big].$$

Так как $v_z = v_z(r)$, а $p = p(z)$, то это уравнение распадается на два:

$$\frac{dp}{dz} = C_0, \qquad \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\Big\{r\frac{dv_z}{dr}\Big\} = C_0,$$

где C_0 – константа разделения переменных.

Решение этих уравнений имеет вид:

$$v_z = \frac{C_0 r^2}{4\eta} + C_1 \ ln\ r + C_2, \tag{2}$$

$$p = C_0 z + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Для нахождения этих констант используем граничные условия $|v_z(r)| < \infty$ и $v_z(r = R) = 0$. Кроме того, будем считать, что при $z = 0$ давление в трубе $p = p_0 = const$. В результате получим: $C_1 = 0$, $C_2 = -C_0 R^2/(4\eta)$, $C_3 = p_0$. Поэтому выражения (2) примут вид

$$v_z = \frac{C_0}{4\eta}(r^2 - R^2), \quad p = p_0 + C_0 z.$$

Так как перепад давлений на единицу длины трубы равен p_1/L, то из второго равенства следует, что $C_0 = -p_1/L$. Тогда

$$v_z = \frac{p_1}{4\eta L}(R^2 - r^2), \quad p = p_0 - \frac{p_1 z}{4\eta L}. \tag{3}$$

Через поперечное сечение трубы каждую секунду протекает $Q = \int\limits_S (\mathbf{v}\ d\mathbf{S})$ единиц объема жидкости. Подставляя первое выражение (3) в эту формулу, получим:

$$Q = \frac{p_1}{4\eta L} \int\limits_0^R r dr \int\limits_0^{2\pi} (R^2 - r^2) d\varphi = \frac{\pi p_1 R^4}{8\eta L}.$$

Отсюда следует, что при установившемся течении вязкой жидкости секундный расход Q линейно зависит от перепада давлений p_1/L, обратно пропорционален коэффициенту вязкости жидкости и пропорционален четвертой степени радиуса трубы.

ГЛАВА 6
ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

§ 25. Основные понятия

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени, называемом еще иногда пространством Минковского, тензор кривизны равен нулю: $R^i_{knm} = 0$. Поэтому преобразованием координат $x^i = x^i(x'^m)$ метрический тензор g_{ik} этого пространства сразу во всех точках можно привести к галилеевскому виду:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (25.1)$$

Переход к четырехмерным координатам, в которых метрический тензор псевдоевклидова пространства-времени имеет галилеевский вид (25.1), соответствует переходу к инерциальной системе отсчета и использованию в этой системе отсчета трехмерных декартовых координат $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. В этих координатах квадрат интервала принимает наиболее простой вид:

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad (25.2)$$

где c – скорость света.

Определитель тензора (25.1) равен $g = det||g_{ik}|| = -1$. Используя выражения (25.1) и определение (3.1), несложно найти контравариантные компоненты g^{km} метрического тензора:

$$g^{km} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (25.3)$$

Из определения (6.4) и выражений (25.1), (25.3) для метрического тензора g_{ik} следует, что в декартовых координатах инерциальной системы отсчета псевдоевклидова пространства-времени все символы Кристоффеля равны нулю: $\Gamma^i_{km} = 0$. В этом случае ковариантные производные совпадают с частными производными и все тензорные соотношения имеют наиболее простой вид.

Выделенность псевдоевклидова пространства-времени обусловлена тем, что в том случае, когда можно пренебречь действием гравитационного поля, геометрия нашего реального пространства-времени совпадает с геометрией Минковского. Поэтому все тензорные уравнения и соотношения механики, электродинамики и других разделов физики должны формулироваться и исследоваться с учетом свойств этой геометрии.

Выражение (25.2) для квадрата интервала играет большую роль в установлении многих соотношений в специальной теории относительности. В частности, используя определение $u^i = dx^i/ds$, несложно найти явный вид компонент четырехвектора

$$u^i = \left\{ u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right\}, \qquad (25.4)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ – трехмерный вектор скорости, $\beta = v/c$.

Так как четырехмерный вектор u^i выражается через компоненты трехмерного вектора скорости, то в научной литературе он получил наименование четырехвектора скорости. В силу своего определения квадрат четырехвектора u^i равен единице:

$$u^i u^k g_{ik} = g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1. \tag{25.5}$$

Четырехвектор скорости u^i используется в выражении для четырехвектора импульса релятивистской частицы: $p^i = m_0 c u^i = \{p^0 = E/c, \mathbf{p}\}$, где E – энергия частицы, $\mathbf{p}$ – ее трехмерный импульс.

Подставляя в это выражение соотношение (25.4), в галилеевых координатах получим:

$$p^i = m_0 c u^i = \left\{ p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}.$$

При $v << c$ (нерелятивистское движение) из этого выражения имеем:

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}, \quad \mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}.$$

Если выражение (25.4) ковариантно продифференцировать по s, то получим четырехвектор ускорения

$$w^i = \frac{Du^i}{Ds} = \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kp} u^k u^p.$$

В галилеевских координатах имеем:

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}\frac{du^i}{dt} =$$

$$= \{w^0 = \frac{(\mathbf{a}\ \mathbf{v})}{c^3(1-\beta^2)^2},\quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{c^2(1-\beta^2)} + \frac{(\mathbf{a}\ \mathbf{v})\mathbf{v}}{c^4(1-\beta^2)^2}\},$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ – трехмерный вектор ускорения.

Квадрат четырехвектора ускорения является пространственноподобным вектором:

$$w^i w^k g_{ik} = -\frac{\mathbf{a}^2}{c^4(1-\beta^2)} - \frac{(\mathbf{v}\ \mathbf{a})^2}{c^6(1-\beta^2)^3}.$$

Четырехвекторы скорости и ускорения являются ортогональными векторами:

$$u^i w^k g_{ik} = u^i \frac{Du^k}{Ds} g_{ik} = \frac{1}{2}\frac{D}{Ds}[u^i u^k g_{ik}] = 0, \qquad (25.6)$$

так как $u^i u^k g_{ik} = 1$ согласно соотношению (25.5).

В случае действия на материальную точку массы m_0 трехмерной силы $\mathbf{f}$, уравнение ее движения принимает вид:

$$m_0 c^2 \frac{Du^i}{Ds} = F^i, \qquad (25.7)$$

где F^i – четырехвектор силы.

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета вектор F^i имеет компоненты:

$$F^i = \left\{F^0 = \frac{(\mathbf{f}\ \mathbf{v})}{c\sqrt{1-\beta^2}},\quad \mathbf{F} = \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}. \qquad (25.8)$$

Умножая уравнение (25.7) на $g_{ik}u^k$ и учитывая выражение (25.6), несложно убедиться, что вектор F^i также ортогонален вектору четырехскорости:

$$F^i u^k g_{ik} = 0.$$

Уравнение (25.7) при заданной силе $\mathbf{f}$ позволяет, в принципе, решать широкий круг задач о законах релятивистского движения материальных частиц. Однако система уравнений (25.7) представляет систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, общие методы интегрирования которых в настоящее время отсутствуют. Поэтому в ряде очень важных задач точные решения уравнений (25.7) не найдены.

Задачи

1. В галилеевских координатах, в которых метрический тензор имеет вид (25.1), используя уравнение движения (25.7) и соотношение (25.8), записать уравнения для импульса $\mathbf{p}$ и энергии E релятивистской частицы.

Решение. Интервал (25.2) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2}\right)dt^2 = (1-\beta^2)c^2dt^2.$$

Поэтому $d/ds = d/[c\sqrt{1-\beta^2}dt]$. Используя выражения (25.4) и (25.8), запишем тензорное уравнение (25.7) по компонентно:

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{(\mathbf{f}\ \mathbf{v})}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1)$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда получаем уравнения релятивистской механики для импульса $\mathbf{p}=m_0\mathbf{v}/\sqrt{1-\beta^2}$ и энергии $E=m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}$:

$$\frac{dE}{dt}=(\mathbf{f}\ \mathbf{v}),\qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{f}. \tag{2}$$

Таким образом, уравнения релятивистской механики (2) по форме совпадают с соответствующими уравнениями ньютоновской механики, отличаясь от них выражениями для энергии E и импульса $\mathbf{p}$.

2. Используя уравнения движения (25.7), выразить ускорение частицы $\mathbf{a}$ через скорость $\mathbf{v}$ и трехмерный вектор силы $\mathbf{f}$.

Решение. Проведем дифференцирование в левых частях уравнений (1) предыдущей задачи. В результате получим:

$$\frac{(\mathbf{a}\ \mathbf{v})}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}=\frac{(\mathbf{f}\ \mathbf{v})}{m_0},$$

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{(\mathbf{a}\ \mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2\sqrt{(1-\beta^2)^3}}=\frac{\mathbf{f}}{m_0}.$$

Подставляя первое равенство во второе, будем иметь:

$$\mathbf{a}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m_0}\left\{\mathbf{f}-\frac{(\mathbf{f}\ \mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2}\right\}.$$

Таким образом, ускорение релятивистской частицы, приобретаемое под действием постоянной силы $\mathbf{f}$, стремится к нулю при $v\to c$. Следовательно, скорость света – недосягаемый предел для скорости любой массивной частицы.

§ 26. Группа движений псевдоевклидова пространства-времени

Выражение (25.2) для квадрата интервала в декартовых координатах инерциальной системы отсчета при совершении целого ряда преобразований координат и времени $x^i = x^i(x'^p)$ сохраняет свой вид:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \tag{26.1}$$

$$= ds'^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

Свойство неизменности функциональной формы некоторого геометрического объекта в научной литературе получило название форминвариантности, а группа преобразований координат и времени, оставляющих квадрат интервала (26.1) форминвариантным, называется группой движений. Эта группа является десятипараметрической, по числу свободных параметров в четырех соотношениях $x^i = x^i(x'^p)$, связывающих нештрихованные и штрихованные координаты и время.

Перечислим преобразования $x^i = x^i(x'^p)$, так называемой собственной группы движений (т.е. группы преобразований, не затрагивающих отражения осей координат вида $x^i = -x'^i$).

Самыми простыми из них являются преобразования переноса начала отсчета декартовой системы координат на постоянный вектор $\mathbf{r}_0$ и переноса начала отсчета времени на постоянную величину t_0:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,' - \mathbf{r}_0, \qquad t = t' - t_0. \tag{26.2}$$

Форминвариантность квадрата интервала (26.1) при первом из этих преобразований означает, что в трехмерном

пространстве псевдоевклидова пространства-времени нет выделенных точек. Второе из преобразований (26.2) совместно с выражением (26.1) означает равноправие точек временной оси.

Еще одну подгруппу группы движений псевдоевклидова пространства-времени составляет группа вращений трехмерной декартовой системы координат. Эта группа является трехпараметрической, по числу поворотов системы координат на постоянные углы. В частности, при повороте осей декартовой системы координат вокруг оси z на постоянный угол α, соотношения $x^i = x^i(x'^n)$ принимают вид:

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha,$$
$$y = -x' \sin\alpha + y \cos\alpha,$$
$$t = t', \qquad z = z'$$

и, как несложно убедиться, оставляют выражение для квадрата интервала (26.1) форминвариантным.

И, наконец, особое место в группе движений занимают преобразования, связывающие координаты и время:

$$t = \frac{c^2 t + (\mathbf{v}\ \mathbf{r}\ ')}{c^2\sqrt{(1-\beta^2)}}, \tag{26.3}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\ ' + \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]\frac{(\mathbf{v}\ \mathbf{r}\ ')\mathbf{v}}{v^2} + \frac{\mathbf{v}t'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = v/c$, $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ – постоянный вектор, удовлетворяющий условию $\beta^2 < 1$.

Это трехпараметрическое (по числу компонент постоянного вектора скорости $\mathbf{v}$) преобразование устанавливает связь между декартовыми координатами и временем в двух инерциальных системах отсчета, одна из

которых (штрихованная) движется относительно другой с постоянным по величине и направлению вектором скорости $\mathbf{v}$. Преобразования координат и времени (26.3) в научной литературе получили наименование преобразований Лоренца.

§ 27. Тензорные теоремы Нётер

Уравнения механики, электродинамики и теории гравитации в современной теории поля обычно получают из условия экстремума функционала, который называют действием и обозначают S. Для вывода уравнений механики материальной точки этот функционал записывают в виде криволинейного интеграла в четырехмерном пространстве-времени. Для получения уравнений поля функционал S необходимо представить в виде интеграла по некоторому четырехмерному объему V_4 от функции L, называемой плотностью функции Лагранжа. В силу традиции действие в этом случае записывают в виде

$$S = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} L d^4x, \tag{27.1}$$

где $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ – элемент четырехмерного объема.

Плотность функции Лагранжа является плотностью скаляра веса $+1$, в результате чего действие S оказывается скаляром. Выбор явного вида вещественной функции L осуществляется в зависимости от рассматриваемой системы физических полей.

Пусть, например, эта система состоит из скалярного Ψ и векторного A_i полей, взаимодействующих друг с

другом в псевдоевклидовом пространстве-времени. Если есть основания предполагать, что искомые уравнения для полей являются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, то плотность функции Лагранжа L должна иметь вид:

$$L = L\left(A_i,\ \frac{\partial A_i}{\partial x^n},\ \Psi,\ \frac{\partial \Psi}{\partial x^n},\ g_{ik},\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n},\ g^{mn}\right). \qquad (27.2)$$

Из условия экстремальности функционала (27.1) при независимом варьировании каждой компоненты полей Ψ и A_i получаем уравнения Эйлера – Лагранжа, которые обычно называют уравнениями движения для рассматриваемых полей:

$$\frac{\partial}{\partial x^n}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^n}\right)}\right] - \frac{\partial L}{\partial \Psi} = 0, \qquad (27.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^n}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^n}\right)}\right] - \frac{\partial L}{\partial A_i} = 0.$$

Функция действия S, кроме вывода уравнений движения для физических полей, позволяет получить целый ряд общековариантных тензорных дифференциальных соотношений, которые в научной литературе получили название дифференциальных законов сохранения.

Впервые на возможность такого использования функционала S указал математик Д.Гильберт, ученица которого Э.Нётер впоследствии доказала ряд теорем, которые позволяют получать различные дифференциальные законы сохранения. Идея доказательства этих теорем проста: поскольку действие S является скаляром, то

оно не должно изменяться при проведении инфинитезимальных (бесконечно малых) преобразований.

В частности, если мы совершим малое преобразование координат

$$x^i = x'^{\,i} + \lambda^i(x), \tag{27.4}$$

где $\lambda^i(x)$ – бесконечно малый четырехвектор, то функция действия (27.1) в силу закона преобразования (1.5) не изменится:

$$\delta S_c = S'(x') - S(x) = 0.$$

Однако преобразование (27.4) повлечет за собой изменение всех входящих в правую часть равенства (27.1) величин: пределов интегрирования и элемента четырехмерного объема d^4x. Плотность функции Лагранжа L при преобразовании (27.4) также изменится, поскольку изменятся входящие в нее полевые функции A_i и Ψ, метрический тензор и их частные производные.

В случае плотности L, определяемой выражением (27.2), будем иметь:

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4'} L'(x')d^4x' - \frac{1}{c}\int\limits_{V_4} L(x)d^4x. \tag{27.5}$$

Рассмотрим выражение (27.5). Нам необходимо объединить два интеграла в один. Однако, хотя интегрирование в них производится по одному и тому же четырехмерному объему, в штрихованных и нештрихованных координатах границы этого объема, а значит и пределы интегрирования, определяются различными числовыми

значениями. Поэтому изменим переменные интегрирования в первом из этих интегралов так, чтобы пределы его интегрирования совпадали с пределами интегрирования второго интеграла, не затрагивая $L'(x')$. Для этого совершим преобразование в этом интеграле от координат x' к координатам x :

$$\int\limits_{V_4'} L'(x')d^4x' = \int\limits_{V_4} JL'(x')d^4x,$$

где J – якобиан (1.2) преобразования от переменных x' к переменным x.

Тогда соотношение (27.5) примет вид

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\{J\ L'(x') - L(x)\}d^4x. \qquad (27.6)$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд по малому параметру $\lambda^n(x)$ с точностью до линейных членов. Отметим прежде всего, что якобиан преобразования (1.2) с требуемой точностью принимает вид:

$$J = 1 + \frac{\partial\lambda^n}{\partial x^n}. \qquad (27.7)$$

Подставим это соотношение в выражение (27.6) и учитывая, что $L'(x')$ отличается от $L(x)$ на члены линейные по λ^i, получим:

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4} d^4x\Big\{L'(x') + L(x)\frac{\partial\lambda^n}{\partial x^n} - L(x)\Big\}. \qquad (27.8)$$

Заметим теперь, что разность первых двух членов подынтегрального выражения, по определению, представляет собой координатную вариацию плотности лагранжиана:

$$\delta_c L = L'(x') - L(x).$$

Эта вариация порождает координатную вариацию всех величин, входящих в состав лагранжиана: скалярного $\Psi(x)$ и векторного $A_i(x)$ полей, метрического тензора и их частных производных. Однако использовать координатную вариацию не совсем удобно, так как координатная вариация от тензора не является тензором и, кроме того, координатная вариация непереставима с операцией частного дифференцирования.

Поэтому для дальнейшего удобно выделить из координатной вариации вариацию Ли δ_L, которая перестановочна с частным дифференцированием и не выводит тензоры из их класса. Вариация Ли некоторого геометрического объекта φ_A, имеющего обобщенные (не обязательно тензорные) индексы, обозначенные одной буквой A, по определению, имеет вид:

$$\delta_L \varphi_A = \varphi'_A(x) - \varphi_A(x). \tag{27.9}$$

Поскольку в этом выражении аргументы обоих членов совпадают, то вариация Ли от тензора также будет тензором. Используя определение (27.9), координатную вариацию поля φ_A можно представить в следующем виде:

$$\delta_c \varphi_A = \varphi'_A(x') - \varphi'_A(x) + \delta_L \varphi_A(x).$$

Сохраняя только линейные по $\lambda^i(x)$ члены, получим, что при инфинитезимальном преобразовании координат

(27.4) координатная вариация связана с вариацией Ли соотношением:

$$\delta_c \varphi_A = \delta_L \varphi_A + \lambda^n \frac{\partial \varphi_A(x)}{\partial x^n}. \tag{27.10}$$

Используя соотношения (27.7) и (27.10), выражение (27.8) перепишем в виде:

$$\delta_c S = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} d^4x \Big\{ \delta_L L(x) + \frac{\partial}{\partial x^n} \big[L(x) \lambda^n \big] \Big\}. \tag{27.11}$$

Найдем теперь выражение для вариации Ли от рассматриваемой плотности функции Лагранжа. По определению (27.10) имеем:

$$\delta_L L(x) = L'\Big(A'_i(x),\ \frac{\partial A'_i(x)}{\partial x^n}, \Psi'(x),\ \frac{\partial \Psi'(x)}{\partial x^n}, \tag{27.12}$$

$$g'_{ik}(x), \frac{\partial g'_{ik}(x)}{\partial x^n},\ g'^{mn}(x)\Big) - L\Big(A_i(x),\ \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^n},$$

$$\Psi(x),\ \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x^n},\ g_{ik}(x),\ \frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^n},\ g^{mn}(x)\Big).$$

Учтем, что в силу этого же определения

$$\Psi'(x) = \Psi(x) + \delta_L \Psi(x), \qquad \frac{\partial \Psi'(x)}{\partial x^n} = \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x^n} + \delta_L \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x^n},$$

$$A'_i(x) = A_i(x) + \delta_L A_i(x), \qquad \frac{\partial A'_i(x)}{\partial x^n} = \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^n} + \delta_L \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^n},$$

$$g'_{ik}(x) = g_{ik}(x) + \delta_L g_{ik}(x), \qquad \frac{\partial g'_{ik}(x)}{\partial x^n} = \frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^n} + \delta_L \frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^n},$$

$$g'^{\,nm}(x) = g^{nm}(x) + \delta_L g^{nm}(x).$$

Подставляя эти соотношения в выражение (27.12), разложим первое слагаемое, стоящее в его правой части, в ряд по малым параметрам – вариациям Ли $\delta_L\Psi(x)$, $\delta_L A_i(x)$, $\delta_L g_{ik}(x)$, $\delta_L g^{nm}(x)$ и их частным производным. Оставляя только линейные члены, получим

$$\delta_L L(x) = \frac{\partial L}{\partial \Psi}\delta_L\Psi + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x^n}\right)}\delta_L\frac{\partial\Psi}{\partial x^n} + \frac{\partial L}{\partial g^{nm}}\delta_L g^{nm} +$$

$$+\frac{\partial L}{\partial g_{ik}}\delta_L g_{ik} + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right)}\delta_L\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n} + \frac{\partial L}{\partial A_i}\delta_L A_i + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^n}\right)}\delta_L\frac{\partial A_i}{\partial x^n}.$$

Переставляя местами независимые операции частного дифференцирования и варьирования и проводя тождественные преобразования, отсюда имеем:

$$\delta_L L(x) = \left\{\frac{\partial L}{\partial\Psi} - \frac{\partial}{\partial x^n}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x^n}\right)}\right]\right\}\delta_L\Psi + \frac{\partial L}{\partial g^{nm}}\delta_L g^{nm} +$$

$$+\left\{\frac{\partial L}{\partial g_{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^n}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right)}\right]\right\}\delta_L g_{ik} +$$

$$+\left\{\frac{\partial L}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x^n}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^n}\right)}\right]\right\}\delta_L A_i +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^n}\left\{\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x^n}\right)}\delta_L\Psi + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^n}\right)}\delta_L A_i + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right)}\delta_L g_{ik}\right\}.$$

Учтем теперь, что вариации Ли $\delta_L g^{nm}$ не являются независимыми от вариаций $\delta_L g_{ik}$:

$$\delta_L g^{mn} = -g^{mi}g^{nk}\delta_L g_{ik}.$$

Тогда используя уравнения (27.3) и полученные соотношения, выражение (27.11) можно записать в виде:

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4} d^4x\Big\{\Big[\frac{\partial L}{\partial g_{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^n}\Big(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right)}\Big) -$$

$$-g^{mi}g^{nk}\frac{\partial L}{\partial g^{nm}}\Big]\delta_L g_{ik} + \nabla_n J^n\Big\}, \qquad (27.13)$$

где введено обозначение J^n для плотности четырехвектора веса $+1$:

$$J^n = L\lambda^n + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x^n}\right)}\delta_L\Psi + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^n}\right)}\delta_L A_i + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\right)}\delta_L g_{ik} \qquad (27.14)$$

и учтено, что дивергенция его в частных производных совпадает с ковариантной дивергенцией:

$$\nabla_n J^n = \frac{\partial J^n}{\partial x^n}.$$

Вариации Ли $\delta_L\Psi$, $\delta_L A_i$ и $\delta_L g_{ik}$, входящие в соотношения (27.13) и (27.14), не являются независимыми друг от друга, так все они возникают при одном и том же преобразовании координат (27.4). Поэтому вариации Ли $\delta_L\Psi$, $\delta_L A_i$ и $\delta_L g_{ik}$ могут быть выражены через четыре компоненты вектора $\lambda^n(x)$.

Найдем эти выражения. Начнем со скалярного поля. По определению имеем:

$$\delta_L\Psi = \delta_c\Psi - \lambda^n\partial_n\Psi.$$

Так как координатная вариация скаляра равна нулю в силу его закона преобразования $\Psi'(x') = \Psi(x)$ при преобразовании координат, а частная производная от скаляра совпадает с ковариантной, то будем иметь:

$$\delta_L \Psi = -\lambda^n \nabla_n \Psi. \tag{27.15}$$

Совершенно аналогично получим и для четырехвектора $A_i(x)$:

$$\delta_L A_i(x) = \delta_c A_i(x) - \lambda^n \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^n} = A'_i(x') - A_i(x) - \lambda^n \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^n}.$$

Четырехвектор $A_i(x)$ обладает законом преобразования (1.6). Используя соотношение (27.4) и проводя вычисления с точностью до линейных по λ^i членов, будем иметь:

$$A'_i(x') = A_i(x) - \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i} A_m(x).$$

Тогда вариация Ли от четырехвектора $A_i(x)$ примет вид:

$$\delta_L A_i(x) = -A_m(x) \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i} - \lambda^m \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^m}.$$

Добавим и вычтем $\Gamma^m_{ni} A_m \lambda^n$ в правой части этого выражения. В результате получим:

$$\delta_L A_i(x) = -A_m(x) \nabla_i \lambda^m - \lambda^m \nabla_m A_i(x). \tag{27.16}$$

Найдем теперь вариацию Ли от ковариантных компонент метрического тензора. Как обычно имеем:

$$\delta_L g_{ik}(x) = g'_{ik}(x') - g_{ik}(x) - \lambda^n \frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^n}. \tag{27.17}$$

Из закона преобразования метрического тензора следует, что

$$g'_{ik}(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,i}} \frac{\partial x^n}{\partial x'^{\,k}} g_{mn}(x).$$

Подставляя в это равенство выражение (27.4) и пренебрегая членами, квадратичными по λ^i, выражение (27.17) приведем к виду:

$$\delta_L g_{ik}(x) = -g_{im} \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^k} - g_{km} \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i} - \lambda^m \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}. \qquad (27.18)$$

Выразим теперь частную производную от метрического тензора g_{ik} через компоненты символов Кристоффеля:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} = g_{kn}\Gamma^n_{mi} + g_{in}\Gamma^n_{mk}.$$

Тогда из выражения (27.18) будем иметь:

$$\delta_L g_{ik}(x) = -g_{im}\nabla_k \lambda^m - g_{km}\nabla_i \lambda^m. \qquad (27.19)$$

Используя выражения (27.15), (27.16) и (27.19), соотношение (27.13) приведем к виду:

$$\delta_c S = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} d^4x \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{ik} \left[g_{im}\nabla_k \lambda^m + g_{km}\nabla_i \lambda^m \right] + \nabla_n J^n \right\},$$

где в целях сокращения записи введено следующее обозначение симметрического тензора энергии-импульса системы:

$$T^{ik} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial g_{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^n} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n} \right)} \right] - g^{ni} g^{km} \frac{\partial L}{\partial g^{nm}} \right\}. \qquad (27.20)$$

Теперь нам необходимо избавиться от производных вектора λ^m, стоящих в квадратных скобках. Воспользовавшись формулой дифференцирования по частям и четырехмерной теоремой Остроградского – Гаусса, получим:

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4} d^4x\Big\{-\sqrt{-g}\lambda^m\nabla_i[T^{ik}g_{mk}]\Big\}+ \tag{27.21}$$

$$+\frac{1}{c}\int\limits_{S_4} dS_n\Big[J^n+\sqrt{-g}T^{nk}g_{mk}\lambda^m\Big],$$

где S_4 – поверхность, ограничивающая рассматриваемый четырехобъем.

Поскольку бесконечно малый четырехвектор λ^m произволен, то мы можем воспользоваться этим произволом для упрощения выражения (27.21). Пусть, например, сначала вектор λ^m будет произволен внутри четырехобъема, а на его границах сам вектор и его ковариантные производные равны нулю. Тогда и в выражении (27.21) поверхностный интеграл обратится в нуль и оно примет вид:

$$\delta_c S = -\frac{1}{c}\int\limits_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\lambda^m\nabla_i T^i_m.$$

При преобразовании (27.4) с произвольным инфинитезимальным вектором $\lambda^m(x)$ вариация $\delta_c S = 0$. В силу основной леммы вариационного исчисления отсюда получаем следующий дифференциальный закон сохранения:

$$\nabla_i T^i_m = 0. \tag{27.22}$$

Кроме него мы можем получить и другие дифференциальные законы сохранения. Для этого подставим соотношение (27.22) в выражение (27.21) и преобразуем поверхностный интеграл в объемный. В результате будем иметь:

$$\frac{1}{c}\int\limits_{V_4} d^4x\Big\{\nabla_n\Big[J^n+\sqrt{-g}T^n_m\lambda^m\Big]\Big\}=0. \qquad (27.23)$$

Учитывая явный вид (27.20) для плотности четырехвектора J^n и проводя в выражении (27.23) дифференцирование, получим:

$$\frac{1}{c}\int\limits_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\Big\{\lambda^m\Big[\nabla_n(T^n_m-\tau^n_m)\Big]+ \qquad (27.24)$$

$$+\Big[T^n_m-\tau^n_m-\nabla_p\sigma^{pn}_m\Big]\nabla_n\lambda^m-\sigma^{pn}_m\nabla_n\nabla_p\lambda^m\Big\}=0,$$

где введены следующие обозначения:

$$\sigma^{pn}_m=\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big\{2\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial g_{in}}{\partial x^p}\right)}g_{mi}+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_n}{\partial x^p}\right)}A_m\Big\}, \qquad (27.25)$$

$$\tau^n_m=\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big\{-L\delta^n_m+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x^n}\right)}\nabla_m\Psi+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^n}\right)}\nabla_m A_i\Big\}.$$

Тензор τ^n_m называется каноническим тензором энергии-импульса, а тензор σ^{pn}_m – тензором спина.

Поскольку в левой части соотношения (27.24) объем интегрирования произволен, то подынтегральное выражение должно быть равным нулю тождественно. Так как

в каждой точке пространства-времени четырехвектор λ^i и его ковариантные производные можно выбрать произвольными и в псевдоевклидовом пространстве-времени $\nabla_n \nabla_p \lambda^m = \nabla_p \nabla_n \lambda^m$, то данное выражение эквивалентно следующим трем дифференциальным законам сохранения:

$$\nabla_n [T^n_m - \tau^n_m] = 0, \tag{27.26}$$

$$T^n_m - \tau^n_m = \nabla_p \sigma^{pn}_m, \qquad \sigma^{pn}_m + \sigma^{np}_m = 0.$$

Эти соотношения показывают, что, во-первых, тензор спина σ^{pn}_m является антисимметрическим по верхним индексам, во-вторых, симметрический тензор энергии-импульса T^n_m отличается от канонического тензора τ^n_m на дивергенцию тензора спина. Тензор спина для скалярного поля равен нулю, но для других полей он отличен от нуля.

§ 28. Неинерциальные системы отсчета

В механике и электродинамике иногда возникает необходимость проводить решение задач в неинерциальных системах отсчета. В частности, из-за вращения Земли вокруг своей оси все земные лаборатории оказываются слабонеинерциальными. Поэтому даже в земной лаборатории эффекты, вызываемые ее неинерциальным движением, могут оказать существенное влияние на ход механических и электродинамических процессов.

Адекватное описание различных явлений в неинерциальных системах отсчета возможно только при последовательном использовании четырехмерного тензорного анализа. Рассмотрим несколько простых примеров неинерциальных систем отсчета и покажем какой вид в них

принимают основные тензорные соотношения и уравнения.

а) Вращающаяся система отсчета.

Пусть в исходной инерциальной системе отсчета, метрический тензор которой имеет вид (25.1), находится другая система отсчета, оси x и y которой вращаются вокруг оси z с постоянной угловой частотой Ω. В этом случае уравнения $x^i = x^i(x'^n)$, связывающие координаты и время $(\mathbf{r}, t)$ инерциальной системы отсчета с координатами и временем вращающейся системы отсчета $(\mathbf{r}\,', t')$, принимают вид:

$$x = x' \cos \Omega t' - y' \sin \Omega t', \tag{28.1}$$

$$y = x' \sin \Omega t' + y' \cos \Omega t',$$

$$t = t', \qquad z = z.'$$

Взяв дифференциалы от этих соотношений и подставляя их в выражение (25.2) для интервала, получим:

$$ds^2 = c^2 \left[1 - \frac{\Omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right] dt'^2 + \tag{28.2}$$

$$+2\Omega y' dx' dt' - 2\Omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

Сравнивая это равенство с равенством (3.2), найдем ненулевые компоненты метрического тензора во вращающейся системе отсчета:

$$g'_{00} = 1 - \frac{\Omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2}, \qquad g'_{01} = \frac{\Omega y'}{c}, \tag{28.3}$$

$$g'_{02} = -\frac{\Omega x'}{c}, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

Контравариантные компоненты метрического тензора имеют вид:

$$g'^{00} = 1, \quad g'^{01} = \frac{\Omega y'}{c}, \quad g'^{02} = -\frac{\Omega x'}{c}, \quad g'^{12} = -\frac{\Omega^2 x' y'}{c^2},$$

$$g'^{11} = -1 + \frac{\Omega^2 y'^2}{c^2}, \quad g'^{22} = -1 + \frac{\Omega^2 x'^2}{c^2}, \quad g'^{33} = -1.$$

Таким образом, при переходе от инерциальной системы отсчета к вращающейся системе отсчета метрический тензор подвергся значительным изменениям: у него не только появилась недиагональная часть, но и его компоненты стали функциями координат. Поэтому не все символы Кристоффеля в этой неинерциальной системе отсчета равны нулю:

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{\Omega^2 x'}{c^2}, \quad \Gamma^1_{02} = -\frac{\Omega}{c}, \quad \Gamma^2_{00} = -\frac{\Omega^2 y'}{c^2}, \quad \Gamma^2_{01} = \frac{\Omega}{c}.$$

Однако тензор кривизны (7.3) в этой системе отсчета, как это и должно быть в любой системе отсчета псевдоевклидова пространства-времени, равен нулю $R^i_{knm} = 0$. Если в плоскости $x'O'y'$ ввести полярные координаты, то выражения (28.3) для компонент метрического тензора упрощаются:

$$g'_{00} = 1 - \frac{\Omega r'^2}{c^2}, \qquad g_{0\varphi} = \frac{\Omega r'^2}{c}; \tag{28.4}$$

$$g'_{rr} = g'_{zz} = -1, \qquad g'_{\varphi\varphi} = -r^2.$$

Система уравнений (25.7), определяющая при $F^i = 0$ свободное движение материальной точки, в неинерциальной

системе отсчета с метрическим тензором (28.3) принимает вид:

$$\frac{du^1}{ds} - \frac{\Omega^2 x'}{c^2}(u^0)^2 - \frac{2\Omega}{c}u^0 u^2 = 0,$$

$$\frac{du^2}{ds} + \frac{\Omega^2 y'}{c^2}(u^0)^2 + \frac{2\Omega}{c}u^0 u^1 = 0,$$

$$\frac{du^0}{ds} = \frac{du^3}{ds} = 0.$$

Ее решение найти несложно:

$$x' = (v_{0x}t' + x_0)\cos\Omega t' + (v_{0y}t' + y_0)\sin\Omega t', \qquad (28.5)$$

$$y' = -(v_{0x}t' + x_0)\sin\Omega t' + (v_{0y}t' + y_0)\cos\Omega t',$$

$$z' = v_{0z}t' + z_0,$$

где $v_{0x}, v_{0y}, v_{0y}, x_0, y_0, z_0$ – константы интегрирования.

Сравнивая эти соотношения с законом преобразования координат и времени

$$t' = t, \qquad x' = x\cos\Omega t + y\sin\Omega t,$$

$$z' = z, \qquad y' = -x\sin\Omega t + y\cos\Omega t,$$

вытекающим из выражения (28.1), легко убедиться, что законы свободного движения (28.5) материальной точки во вращающейся системе отсчета соответствуют равномерному и прямолинейному движению этой точки в инерциальной системе отсчета.

б) Релятивистски равноускоренная система отсчета.

Релятивистски равноускоренной системой отсчета называется система, начало отсчета которой движется

релятивистски ускоренно. Релятивистски равноускоренным движением материальной точки называется движение, совершаемое под действием постоянного по величине и направлению трехмерного вектора силы $\mathbf{f} = const$. Предположим, что этот вектор направлен вдоль оси z. Тогда система уравнений (25.7), (25.8) сведется к одному уравнению (см. задачу 2 § 25):

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = cb = const,$$

где $v = dz/dt$, $b = f_z/(m_0 c)$.

Решение этого уравнения с начальными условиями $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = 0$ имеет простой вид:

$$z = \frac{1}{b^2}\left[\sqrt{1+b^2t^2} - 1\right]. \tag{28.6}$$

Поэтому закон преобразования координат и времени $x^i = x^i(x'^n)$ при переходе от инерциальной системы отсчета к релятивистски равноускоренной системе отсчета, движущейся вдоль оси z, можно представить в виде:

$$t = t', \quad x = x', \quad y = y',$$

$$z = z' + \frac{1}{b^2}\left[\sqrt{1+b^2t'^2} - 1\right].$$

Взяв дифференциалы от этих соотношений и подставляя их в выражение (25.2) для квадрата интервала в псевдоевклидовом пространстве-времени, получим:

$$ds^2 = \frac{c^2dt'^2}{1+b^2t'^2} - \frac{2cbt'dz'dt'}{\sqrt{a+b^2t'^2}} - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \tag{28.7}$$

Таким образом, в релятивистски равноускоренной системе отсчета ненулевые компоненты метрического тензора являются функциями времени:

$$g'_{00} = \frac{1}{1 + b^2 t'^2}, \quad g'_{0z} = -\frac{bt'}{\sqrt{1 + b^2 t'^2}}, \tag{28.8}$$

$$g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = -1.$$

Из этих выражений следует, что неравной нулю оказывается только единственная компонента символов Кристоффеля:

$$\Gamma^z_{00} = \frac{b}{c\sqrt{(1 + b^2 t'^2)^3}}. \tag{28.9}$$

В неинерциальных системах отсчета привычные представления о законах механики оказываются неприменимыми. В частности, в этих системах отсчета не действует закон инерции. Поэтому для того, чтобы удержать тело в состоянии покоя в неинерциальной системе отсчета, к нему необходимо приложить силу.

Чтобы проиллюстрировать это утверждение, запишем четыре компонены уравнения движения (25.7) в случае релятивистски равноускоренной системы отсчета:

$$m_0 c^2 \frac{du^0}{ds} = F^0, \quad m_0 c^2 \frac{du^1}{ds} = F^1, \quad m_0 c^2 \frac{du^2}{ds} = F^2, \tag{28.10}$$

$$m_0 c^2 \left[\frac{du^3}{ds} + \Gamma^3_{00} u^0 u^0\right] = F^3.$$

В состоянии покоя $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt' = 0$. Поэтому $u^1 = u^2 = u^3 = 0$, а компонента u^0, в силу соотношения $g'_{ik} u^i u^k = 1$, равна $u^0 = 1/\sqrt{g'_{00}}$. Учитывая, что в рассматриваемом

случае $ds = c\sqrt{g'_{00}}dt'$, систему уравнений (28.10) приведем к виду:

$$F^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{g'_{00}}}\frac{d}{dt'}\frac{1}{\sqrt{g'_{00}}}, \quad F^1 = F^2 = 0, \quad F^3 = \frac{m_0 c^2}{g'_{00}}\Gamma^3_{00}.$$

Подставляя в эти соотношения выражения (28.8) и (28.9), получим окончательно:

$$F^0 = m_0 c b^2 t', \quad F^1 = F^2 = 0, \quad F^3 = \frac{m_0 bc}{\sqrt{1 + b^2 t'^2}}.$$

Таким образом, компоненты четырехвектора силы, удерживающей тело в покое в релятивистски равноускоренной системе отсчета, являются функциями времени, а квадрат этой силы не зависит от времени: $g_{ik}F^iF^k = -m_0c^2b^2 = -f_z^2 = const$.

Задачи

1. Найти закон свободного движения тела массы m_0 в релятивистски равноускоренной системе отсчета.

Решение. При свободном движении $F^i = 0$, поэтому уравнение (25.7) принимает вид:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kn}u^k u^n = 0. \tag{1}$$

Опуская штрихи, запишем выражение для квадрата интервала (28.7) в релятивистски равноускоренной системе отсчета в виде:

$$ds^2 = [c^2 g_{00} + 2cg_{0z}\dot{z} - \dot{\mathbf{r}}^2]dt^2,$$

где $\dot{\mathbf{r}} = \{\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\}$, а точка обозначает производную по времени.

Поэтому компоненты четырехвектора скорости u^i будут иметь вид:

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{c^2 g_{00} + 2cg_{0z}\dot{z} - \dot{\mathbf{r}}^2}}, \qquad \mathbf{u} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 g_{00} + 2cg_{0z}\dot{z} - \dot{\mathbf{r}}^2}}.$$

Учитывая, что $d/ds = d/[\sqrt{c^2 g_{00} + 2cg_{0z}\dot{z} - \dot{\mathbf{r}}^2}dt]$, и подставляя выражение (28.9) в уравнение (1), получим:

$$\frac{du^0}{dt} = \frac{du^1}{dt} = \frac{du^2}{dt} = 0,$$

$$\frac{du^3}{dt} + \frac{b}{\sqrt{(1+b^2t^2)^3}}u^0 = 0.$$

Решение первых трех уравнений этой системы удобно записать в виде

$$u^0 = cC_0 = const, \; u^1 = C_1 = const, \; u^2 = C_2 = const.$$

Тогда последнее уравнение легко интегрируется:

$$u^3 = C_3 - \frac{bcC_0 t}{\sqrt{1+b^2t^2}}.$$

Так как $u^1 = u^0\dot{x}/c$, $u^2 = u^0\dot{y}/c$, $u^3 = u^0\dot{z}/c$, то для определения $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ получим уравнения

$$\dot{x} = \frac{C_1}{C_0} = const, \; \dot{y} = \frac{C_2}{C_0} = const, \; \dot{z} = \frac{C_3}{C_0} - \frac{cbt}{\sqrt{1+b^2t^2}}.$$

Интегрируя их, будем иметь:

$$x = \frac{C_1}{C_0}t + x_0, \qquad y = \frac{C_2}{C_0}t + y_0,$$

$$z = \frac{C_3}{C_0}t - \frac{c}{b}[\sqrt{1+b^2t^2} - 1] + z_0,$$

где x_0, y_0, z_0 – константы интегрирования.

Таким образом, в релятивистски равноускоренной системе отсчета, в которой квадрат интервала имеет вид (28.7), свободное тело движется равномерно в направлении осей x и y и релятивистски равноускоренно – в направлении оси z.

2. Определить четырехмерную силу F^i, которую необходимо приложить, чтобы тело массы m_0 находилось в покое в точке $x = R, y = z = 0$ вращающейся системы отсчета.

Решение. Когда тело находится в покое, его четырехвектор скорости имеет вид

$$u^0 \neq 0, \; u^r = u^\varphi = u^z = 0.$$

Из соотношения (25.5) следует, что в этом случае $u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}$. Используя выражения (28.4) и определение (3.1), построим контравариантные компоненты метрического тензора:

$$g^{00} = 1, \quad g^{zz} = g^{rr} = -1, \quad g^{0\varphi} = \frac{\Omega}{c}, \quad g^{\varphi\varphi} = -\frac{1}{r^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}.$$

Подставляя соотношения (28.4) и (2) в выражение (6.4), найдем неравные нулю компоненты символов Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma^r_{00} = -\frac{\Omega^2 r}{c^2}, \; \Gamma^r_{0\varphi} = \frac{\Omega r}{c}, \; \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \; \Gamma^\varphi_{0r} = -\frac{\Omega}{cr}, \; \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}.$$

Уравнение (25.7) с учетом полученных выражений позволяет определить четырехвектор силы, которую необходимо приложить в точке $x = R, y = z = 0$ вращающейся системы отсчета, чтобы тело массы m_0 находилось в покое:

$$F^r = -\frac{m_0 c^2 \Omega^2 R}{(c^2 - \Omega^2 R^2)}, \quad F^0 = F^\varphi = F^z = 0.$$

§ 29. Эффект Саньяка

В качестве примера использования неинерциальных систем отсчета проведем расчет эффекта Саньяка [19]. Этот эффект заключается в том, что время обхода контура вращающегося кольцевого интерферометра зависит от направления распространения электромагнитной волны в этом интерферометре. В результате у двух волн, обходящих контур в противоположных направлениях, возникает фазовый сдвиг, который приводит к смещению интерференционных полос. Эффект Саньяка является чисто кинематическим эффектом.

Предположим, что в плоскости XOY системы отсчета, вращающейся с частотой Ω, расположен кольцевой интерферометр, уравнение контура которого в цилиндрических координатах имеет вид: $r = R$, $z = 0$.

Предположим далее, что из точки $x = R$, $y = z = 0$ вдоль этого кольцевого контура распространяются две электромагнитные волны: одна в направлении возрастания полярного угла φ, а другая – в противоположном направлении. В дальнейшем все величины, относящиеся к первой волне, будем обозначать индексом "+", а ко второй – индексом "-". Найдем разность времен $\Delta t = t_- - t_+$, необходимых передним фронтам этих волн для совершения одного обхода контура кольцевого интерферометра. Для этого запишем прежде всего выражение для квадрата интервала во вращающейся системе отсчета (28.1) в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = c^2\left[1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right]dt^2 + 2\Omega r^2 dt d\varphi - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2.$$

Так как при распространении электромагнитных волн согласно (3.7) интервал ds равен нулю, то для двух волн,

движущихся по кольцевому интерферометру ($r = R = const$, $dr = 0$, $z = 0$, $dz = 0$), получим следующее квадратное уравнение

$$c^2\left[1 - \frac{\Omega^2 R^2}{c^2}\right]dt^2 + 2\Omega R^2 dt d\varphi - R^2 d\varphi^2 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$d\varphi_\pm = \left[\Omega \pm \frac{c}{R}\right]dt, \tag{29.1}$$

где знак плюс относится к волне, распространяющейся в направлении возрастания полярного угла φ, а знак минус – к встречной волне.

Решая дифференциальное уравнение (29.1), получим зависимость от времени полярных координат передних фронтов рассматриваемых двух электромагнитных волн

$$\varphi_+(t) = \left[\Omega + \frac{c}{R}\right]t + \varphi_{01}, \tag{29.2}$$

$$\varphi_-(t) = \left[\Omega - \frac{c}{R}\right]t + \varphi_{02}.$$

Постоянные интегрирования φ_{01} и φ_{02} можно найти, если учесть, что в начальный момент времени $t = 0$ передние фронты обеих волн находились в точке $x = R$, $y = z = 0$. Тогда $\varphi_+(0) = 0$, $\varphi_-(0) = 2\pi$ и мы имеем $\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{02} = 2\pi$. В результате законы движения (29.2) передних фронтов двух электромагнитных волн, распространяющихся во вращающемся кольцевом интерферометре, приобретают вид

$$\varphi_+(t) = \left[\Omega + \frac{c}{R}\right]t, \tag{29.3}$$

$$\varphi_-(t) = 2\pi - \left[\Omega - \frac{c}{R}\right]t.$$

После совершения обхода контура полярная координата φ переднего фронта первой волны станет равной $\varphi_+ = 2\pi$, а у второй волны $\varphi_- = 0$. Используя эти условия, из выражений (29.3) найдем время $t_\pm$, необходимое волнам для обхода контура:

$$t_+ = \frac{2\pi R}{[c + \Omega R]}, \quad t_- = \frac{2\pi R}{[c - \Omega R]}.$$

Разность этих времен

$$\Delta t = t_- - t_+ = \frac{4\pi\Omega R^2}{[c^2 - \Omega^2 R^2]}$$

оказывается пропорциональной произведению угловой частоты вращения системы отсчета Ω и площади πR^2, охватываемой контуром кольцевого интерферометра.

Так как $t_- \neq t_+$ при $\Omega \neq 0$, то после обхода контура электромагнитные волны придут в точку $x = R$, $y = z = 0$, имея разные фазы.

Поэтому измеряя величину разности фаз у встречных волн и зная площадь, охватываемую контуром, можно определить величину угловой скорости Ω вращающейся системы отсчета. На этом принципе можно создать устройство, позволяющее измерять угловые скорости вращения различных конструкций (автомобилей, самолетов) при их неинерциальном движении. Однако чувствительность этого способа не очень высока, в результате чего для измерения с требуемой точностью необходимо использовать кольцевые интерферометры больших размеров.

В частности, в опытах самого Саньяка по измерению угловой частоты вращения Земли использовался кольцевой интерферометр с периметром около 600 м. Поэтому в настоящее время в качестве навигационного прибора, позволяющего измерять величину Ω, большее распространение получили кольцевые лазеры (лазерные гироскопы).

ГЛАВА 7
ТЕНЗОРЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

§ 30. Уравнения Максвелла в тензорной форме

В электродинамике Максвелла полевой переменной является антисимметричный тензор второго ранга F_{ik}, называемый тензором электромагнитного поля.

Этот тензор связан с четырехвектором потенциала A_i общековариантным соотношением:

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \qquad (30.1)$$

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета псевдоевклидова пространства-времени компоненты тензора F_{ik} наиболее просто выражаются через компоненты векторов напряженностей электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (30.2)$$

Уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле в электродинамике Максвел-

ла могут быть получены из действия:

$$S = -m_0 c \int\limits_A^B ds - \frac{e}{c} \int\limits_A^B A_i dx^i.$$

В результате приходим к уравнениям

$$m_0 c \left[\frac{du^n}{ds} + \Gamma^n_{ik} u^i u^k \right] = \frac{e}{c} F^{nk} u_k, \tag{30.3}$$

где e – электрический заряд частицы, $u^n = dx^n/ds$ – ее четырехвектор скорости.

Для получения уравнений Максвелла при наличии в вакууме заряженных частиц, используется функция действия

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int\limits_{V_4} \sqrt{-g} F^{ik} F_{ik} d^4x - \frac{1}{c^2} \int\limits_{V_4} \sqrt{-g} A_i j^i d^4x,$$

где j^i – четырехвектор плотности тока заряженных частиц.

Таким образом, плотность функции Лагранжа в этом случае принимает вид

$$L = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi c} F^{ik} F_{ik} - \frac{\sqrt{-g}}{c^2} A_i j^i. \tag{30.4}$$

Подставляя это выражение во второе из соотношений (27.3), приходим к тензорному уравнению

$$\nabla_k F^{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\sqrt{-g} F^{ik} \right] = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{30.5}$$

Еще одно тензорное уравнение в этой теории имеет вид:

$$\nabla_i F_{kn} + \nabla_k F_{ni} + \nabla_n F_{ik} = 0. \qquad (30.6)$$

Подставляя в это уравнение выражение (30.1), несложно убедиться, что оно выполняется только лишь в силу математической конструкции тензора F_{ik}.

В инерциальной системе отсчета псевдоевклидова пространства-времени тензорные уравнения (30.5), (30.6) принимают вид трехмерных векторных уравнений:

$$rot\ \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t), \quad div\ \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{r},t), \qquad (30.7)$$

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad div\ \mathbf{H} = 0,$$

где $\rho(\mathbf{r},t)$ – плотность электрического заряда, а $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ – плотность электрического тока.

При наличии материальных сред использовать уравнения (30.5) и (30.6) для решения задач оказывается невозможно, так как в этом случае выражение для четырехвектора тока $j^i = \{j^0 = c\rho, \mathbf{j}\}$ должно включать ρ и $\mathbf{j}$ от всех заряженных частиц, составляющих атомы и молекулы вещества. Так как в единице объема вещества содержится $N \sim 10^{19}$ частиц, то в этом случае, как и в механике сплошных сред, необходимо использовать усредненные уравнения. В результате такого подхода приходят к системе тензорных уравнений вида

$$\nabla_k Q^{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}Q^{ik}\right] = -\frac{4\pi}{c}j^i, \qquad (30.8)$$

$$\nabla_i F_{kn} + \nabla_k F_{ni} + \nabla_n F_{ik} = 0,$$

где j^i – усредненный четырехвектор плотности тока свободных зарядов, а тензоры Q_{ik} и F_{ik} выражаются через компоненты трехмерных векторов электрической индукции $\mathbf{D}$, напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$.

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета эти тензоры имеют вид

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (30.8), можно получить уравнения Максвелла для вещества и в трехмерной форме

$$rot\ \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad div\ \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad div\ \mathbf{B} = 0.$$

Для замыкания системы уравнений (30.8) к ним необходимо добавить материальные уравнения $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$. Вид этих уравнений зависит от свойств вещества, в которых происходят электромагнитные явления, и от

величины электромагнитного поля. В частности, в случае линейных сред и относительно слабых электромагнитных полей материальные уравнения обычно записывают в трехмерном тензорном виде:

$$D^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} E_\beta, \quad B^\alpha = \mu^{\alpha\beta} H_\beta,$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ и $\mu^{\alpha\beta}$ – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей среды.

При наличии в веществе достаточно сильных электромагнитных полей векторы электрической $\mathbf{D}$ и магнитной $\mathbf{B}$ индукций становятся нелинейными функциями векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В этом случае оказывается возможным наблюдать в веществе целый ряд нелинейных оптических явлений.

Задача

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета псевдоевклидова пространства-времени записать уравнения движения (30.3) в трехмерном виде.

Решение. В декартовых координатах инерциальной системы отсчета псевдоевклидова пространства-времени метрический тензор имеет вид (25.1).

Поэтому все компоненты символов Кристоффеля равны нулю, а компоненты четырехвектора скорости задаются выражением (25.4). Преобразуем правую часть уравнения (30.3). В силу правила поднятия тензорных индексов $F^{n\cdot}_{\cdot k} = g^{ni} F_{ik}$ имеем

$$F^{n\cdot}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, полагая $n = 0, 1, 2, 3$, будем иметь

$$F^{0\cdot}_{\cdot k} u^k = \frac{(\mathbf{v}\ \mathbf{E})}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad F^{\alpha\cdot}_{\cdot k} u^k = \frac{cE^\alpha + ([\mathbf{v}\ \mathbf{H}])^\alpha}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Используя полученные соотношения и учитывая, что в рассматриваемом случае $d/ds = d/(c\sqrt{1-\beta^2}dt)$, уравнение (30.3) при $n = 0$ перепишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e(\mathbf{E}\ \mathbf{v}). \tag{1}$$

При $n = 1, 2, 3$ уравнение (30.3) дает одно трехмерное векторное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\ \mathbf{H}]. \tag{2}$$

Несложно убедиться, что общие уравнения задачи 1 § 25 переходят в уравнения (1) и (2), если сила, действующая на заряженную частицу в электромагнитном поле, имеет вид

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\ \mathbf{H}].$$

Эта сила в научной литературе получила наименование силы Лоренца.

§ 31. Уравнение эйконала

При решении многих задач требуется установить частотно-фазовые характеристики электромагнитной волны при ее распространении в различных ситуациях. Это можно сделать, не решая уравнений (30.5) и (30.6), если справедливо приближение геометрической оптики,

т.е. когда длина волны электромагнитного излучения мала по сравнению с остальными характерными линейными размерами, которые встречаются в задаче. В этом случае необходимо построить уравнение характеристик (уравнение эйконала) для системы уравнений Максвелла, исследуя которое можно выявить частотно-фазовые соотношения для электромагнитной волны при рассматриваемых условиях. При построении уравнения эйконала обычно приходится иметь дело со сложными тензорными соотношениями. Однако вычисления существенно упрощаются, если использовать теоремы, доказанные в главах 3 и 4.

Проиллюстрируем сказанное на примере построения уравнения эйконала для электромагнитной волны, распространяющейся в кристалле при наличии псевдоримановой геометрии пространства-времени (т.е. при наличии гравитационного поля). В этом случае тензорные уравнения Максвелла (30.8) в области, где $j^i = 0$, имеют вид

$$\nabla_k Q^{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\sqrt{-g} Q^{ik}\right] = 0, \tag{31.1}$$

$$\nabla_i F_{kn} + \nabla_k F_{ni} + \nabla_n F_{ik} = 0.$$

Материальные уравнения $Q^{ik} = Q^{ik}(F_{mn})$, замыкающие систему уравнений (31.1), запишем в виде

$$Q^{ik} = \chi^{ikmn} F_{mn}, \tag{31.2}$$

где тензор χ^{ikmn} зависит от оптических свойств кристаллического вещества и от метрического тензора псевдориманова пространства-времени.

Этот тензор должен удовлетворять следующим свойствам симметрии:

$$\chi^{ikmn} = -\chi^{kimn} = -\chi^{iknm} = \chi^{mnik}.$$

Таким образом, тензор χ^{ikmn} имеет 21 независимую компоненту. При отсутствии вещества этот тензор принимает вид

$$\chi^{ikmn} = \frac{1}{2}\left[g^{im}g^{kn} - g^{km}g^{in}\right],$$

а при наличии вещества его удобно записать в виде

$$\chi^{ikmn} = \frac{1}{2}\left[g^{im}g^{kn} - g^{km}g^{in}\right] + \Phi^{ikmn}, \tag{31.3}$$

где Φ^{ikmn} – тензор, характеризующий диэлектрическую и магнитную восприимчивости вещества.

В приближении геометрической оптики тензор электромагнитного поля F_{mn} имеет вид:

$$F_{mn} = \tilde{F}_{mn}\exp[iS(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)], \tag{31.4}$$

где амплитуда $\tilde{F}_{mn}$ является функцией, производные от которой значительно меньше производных от эйконала $S(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$.

Подставляя выражение (31.4) в соотношение (31.2) и в уравнения (31.1), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$F_{kn}\nabla_i S + F_{ni}\nabla_k S + F_{ik}\nabla_n S = 0,$$

$$\chi^{ikmn}F_{mn}\nabla_k S = 0.$$

Однако независимыми из этих восьми нетривиальных уравнений являются только шесть

$$F_{0\alpha}\nabla_\beta S + F_{\alpha\beta}\nabla_0 S - F_{0\beta}\nabla_\alpha S = 0, \qquad (31.5)$$

$$\chi_\alpha^{kmn} F_{mn}\nabla_k S = 0,$$

где, как обычно, $\chi_\alpha^{kmn} = g_{\alpha i}\chi^{ikmn}$.

Выражая $F_{\alpha\beta}$ из первого уравнения системы (31.5), умножая второе уравнение этой системы на $\nabla_0 S$, приходим к алгебраической системе линейных однородных уравнений

$$\chi_\alpha^{km\beta} F_{0\beta}\nabla_k S\nabla_m S = 0.$$

Вводя обозначения $F_{0\beta} = X_\beta$, $A_\alpha^\beta = \chi_\alpha^{km\beta}\nabla_k S\nabla_m S$, эту систему можно переписать в виде

$$A_\alpha^\beta X_\beta = 0.$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальные решения $F_{0\beta} = X_\beta \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $det||A_\alpha^\beta|| = 0$. Принимая во внимание выражение (31.3), тензор A_α^β приведем к виду

$$A_\alpha^\beta = \nabla^\beta S\nabla_\alpha S - \nabla_m S\nabla^m S\delta_\alpha^\beta + 2\Phi_\alpha^{kn\beta}\nabla_k S\nabla_n S,$$

где введено обозначение $\nabla^m S = g^{mk}\nabla_k S$.

Очевидно, что записав A_α^β в виде матрицы и потом раскрыв ее определитель через компоненты A_α^β по общим правилам, мы получим очень громоздкое выражение, которое непросто будет привести к трехмерно ковариантному виду. Если же использовать формулы тензорной алгебры, доказанные в главах 3 и 4, то запись условия

$det||A^{\beta}_{\alpha}|| = 0$ оказывается существенно проще и имеет трехмерно ковариантный вид.

Согласно соотношениям (11.19) и (11.20) равенство $det||A^{\beta}_{\alpha}|| = 0$ эквивалентно условию

$$2A_{(3)} - 3A_{(1)}A_{(2)} + A^{3}_{(1)} = 0. \tag{31.6}$$

Составляя из тензора A^{β}_{α} инварианты степеней по правилу (III.1) и подставляя их в уравнение (31.6), получим

$$12\Phi^{\alpha ik\beta}\Phi_{\beta}^{\cdot mp\nu}\nabla_{\alpha}S\nabla_{\nu}S\nabla_{i}S\nabla_{k}S\nabla_{m}S\nabla_{p}S+ \tag{31.7}$$

$$+4\left(\Phi_{\nu}^{\cdot ik\nu}\nabla_{i}S\nabla_{k}S\right)^{3} + 6\nabla_{n}S\nabla^{n}S[\Phi^{\beta ik\alpha}\nabla_{i}S\nabla_{k}S\nabla_{\beta}S\nabla_{\alpha}S-$$

$$-\nabla_{\beta}S\nabla^{\beta}S\Phi_{\alpha}^{\cdot ik\alpha}\nabla_{i}S\nabla_{k}S] + 6[\nabla_{n}S\nabla^{n}S - \nabla_{\nu}S\nabla^{\nu}S]\times$$

$$\times[\Phi_{\alpha}^{\cdot ik\beta}\Phi_{\beta}^{\cdot mp\alpha}\nabla_{i}S\nabla_{k}S\nabla_{m}S\nabla_{p}S - \left(\Phi_{\beta}^{\cdot ik\beta}\nabla_{i}S\nabla_{k}S\right)^{2}]-$$

$$-12\Phi_{\beta}^{\cdot ik\beta}\Phi^{\alpha mp\nu}\nabla_{\alpha}S\nabla_{\nu}S\nabla_{i}S\nabla_{k}S\nabla_{m}S\nabla_{p}S+$$

$$+3(\nabla_{n}S\nabla^{n}S)^{2}[2\Phi_{\alpha}^{\cdot ik\alpha}\nabla_{i}S\nabla_{k}S - \nabla_{i}S\nabla^{i}S + \nabla_{\alpha}S\nabla^{\alpha}S]+$$

$$+8\Phi_{\alpha}^{\cdot ik\nu}\Phi_{\nu}^{\cdot jp\beta}\Phi_{\beta}^{\cdot mn\alpha}\nabla_{i}S\nabla_{k}S\nabla_{j}S\nabla_{p}S\nabla_{m}S\nabla_{n}S-$$

$$-12\Phi_{\nu}^{\cdot ik\nu}\Phi_{\alpha}^{\cdot jp\beta}\Phi_{\beta}^{\cdot mn\alpha}\nabla_{i}S\nabla_{k}S\nabla_{j}S\nabla_{p}S\nabla_{m}S\nabla_{n}S = 0.$$

Это уравнение в научной литературе получило название уравнения эйконала.

Так как $\nabla_{m}S \neq 0$, то это уравнение представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно эйконала S. Подставляя в уравнение (31.7) конкретный вид тензора Φ^{ikmn}, зависящий от оптических свойств вещества, и конкретный вид метрического тензора псевдориманова

пространства-времени, зависящий от того, в какой системе отсчета и в каком гравитационном поле находится вещество, мы можем найти эйконал S. Исследуя зависимость эйконала от координат и времени, можно установить частотно-фазовые соотношения, которые возникают у электромагнитной волны при ее распространении через рассматриваемое вещество в присутствии заданного гравитационного поля.

§ 32. Тензор энергии-импульса свободного электромагнитного поля

Рассмотрим электромагнитное поле в области пространства, где отсутствуют заряды и токи. Такое поле будем называть свободным. Плотность функции Лагранжа свободного электромагнитного поля, согласно равенству (30.4), имеет вид

$$L = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi c} F^{ik} F_{ik}. \tag{32.1}$$

Поэтому свободное электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям:

$$\nabla_k F^{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\sqrt{-g} F^{ik}\right] = 0, \tag{32.2}$$

$$\nabla_i F_{kn} + \nabla_k F_{ni} + \nabla_n F_{ik} = 0.$$

Используя выражения (27.20), (27.25) и (32.1), приведем явный вид для симметрического T^{ik} и канонического τ_m^n тензоров энергии-импульса:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[- F^{in} F_{\cdot n}^{k\cdot} + \frac{1}{4} g^{ik} F^{mn} F_{mn} \right], \tag{32.3}$$

$$\tau_m^n = \frac{1}{4\pi}\Big[-F^{nk}\nabla_m A_k + \frac{1}{4}\delta_m^n F^{ik}F_{ik}\Big].$$

Сворачивая индексы у тензора T^{ik}, можно убедиться, что он бесследовый: $T = T^{ik}g_{ik} = 0$. Подставляя выражение (32.1) в соотношение (27.25), получим явный вид тензора спина свободного электромагнитного поля

$$\sigma_m^{pn} = -\frac{1}{4\pi}F^{pn}A_m. \tag{32.4}$$

Подставляя выражения (32.3) и (32.4) в дифференциальные законы сохранения (27.26), несложно убедиться, что они выполняются в силу уравнений (32.2) для свободного электромагнитного поля.

Тензорные выражения (32.3) и (32.4) позволяют исследовать энергетически-импульсные и спиновые характеристики у любого типа свободного электромагнитного поля. Компоненты $\sigma_0^{\mu\nu}$ тензора спина используются для получения выражения для вектора спина $\mathbf{S}$ – собственного момента импульса свободного электромагнитного поля:

$$S_\alpha = E_{\alpha\mu\nu}\sigma_0^{\mu\nu},$$

где $E_{\alpha\mu\nu}$ – аксиальный тензор Леви-Чивита трехмерного пространства.

Компоненты тензора энергии-импульса в декартовой системе координат инерциальной системы отсчета имеют вид:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} w & \sigma_x/c & \sigma_y/c & \sigma_z/c \\ \sigma_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ \sigma_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ \sigma_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{32.5}$$

где $w = (E^2 + H^2)/(4\pi)$ – плотность энергии электромагнитного поля, $\sigma = c[\mathbf{E}\ \mathbf{H}]/(4\pi)$ – вектор Пойнтинга, а $\sigma_{\alpha\beta}$ – так называемый максвелловский тензор напряжений:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}[E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + H^2)].$$

Плотность энергии электромагнитного поля w используется для определения энергии поля E, содержащейся в некотором объеме V :

$$E = \int\limits_V w dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V (E^2 + H^2) dV.$$

Вектор Пойнтинга σ позволяет определить количество энергии электромагнитного поля dI, проходящей в единицу времени через площадку $d\mathbf{S}$:

$$dI = (\sigma d\mathbf{S}) = (\sigma\ \mathbf{n}) r^2 d\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к элементарной площадке dS, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла, r – расстояние от источника электромагнитных волн до площадки $d\mathbf{S}$.

При наличии в рассматриваемой области пространства заряженных частиц к тензору энергии-импульса свободного электромагнитного поля (32.5) необходимо добавить тензор энергии-импульса частиц.

Задача

Найти плотность энергии w и вектор Пойнтинга σ для эллиптически поляризованной плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z :

$$A_x = -\frac{E_{01}}{k}\sin(\omega t - kz), \quad A_y = \frac{E_{02}}{k}\cos(\omega t - kz),$$

где $A_z = \varphi = 0,\ k = \omega/c$.

Решение. Учитывая, что в декартовой системе координат инерциальной системы отсчета $A_i = \{A_0 = \varphi,\ -A_x,\ -A_y,\ -A_z\}$, из выражений (30.1) и (30.2) несложно найти, что

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = rot\ \mathbf{A}.$$

Поэтому

$$E_x = E_{01}\cos(\omega t - kz), \quad H_x = -E_{02}\sin(\omega t - kz),$$

$$E_y = E_{02}\sin(\omega t - kz), \quad H_y = E_{01}\cos(\omega t - kz).$$

Используя соотношения (32.5), получим:

$$w = \frac{(E_{01}^2 + E_{02}^2)}{8\pi} + \frac{(E_{01}^2 - E_{02}^2)}{8\pi}\cos 2(\omega t - kz),$$

$$\sigma = cw\mathbf{e}_z.$$

§ 33. Тензорные соотношения нелинейной электродинамики

Как известно, электродинамика Максвелла в отсутствии вещества является линейной теорией. Ее предсказания по самому широкому кругу вопросов, не затрагивающих субатомный уровень, постоянно подтверждаются со все возрастающей точностью.

Однако ряд фундаментальных физических соображений говорит о том, что электродинамика Максвелла представляет собой лишь первое приближение более общей нелинейной электродинамики вакуума, применимое в пределе слабых электромагнитных полей.

При исследовании нелинейных моделей электродинамики большое значение имеет использование различных тензорных соотношений, которым удовлетворяет антисимметричный тензор электромагнитного поля. Установим эти соотношения.

Из выражения (16.1) следует, что в пространстве $R^4_{1,3}$ четвертая степень тензора электромагнитного поля может быть выражена через вторую степень этого тензора, метрический тензор g_{ik} и два независимых инварианта $I_{(2)}$, $I_{(4)}$ тензора электромагнитного поля:

$$F^{(4)}_{ik} = \frac{1}{2}F^{(2)}_{ik}I_{(2)} + \frac{1}{8}g_{ik}[2I_{(4)} - I^2_{(2)}]. \tag{33.1}$$

Таким образом, произвольная степень $s \geq 4$ тензора электромагнитного поля в этом пространстве также может быть представлена в виде комбинации трех низших степеней тензора F_{ik}, метрического тензора g_{ik} и двух независимых инвариантов тензора электромагнитного поля.

Найдем эту зависимость в явном виде. Но перед этим перейдем в соотношении (33.1) от инвариантов $I_{(2)}$ и $I_{(4)}$ к другим независимым инвариантам $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$, чаще всего используемым в электродинамике и представляющим собой комбинации инвариантов $I_{(2)}$ и $I_{(4)}$:

$$J_{(1)} = \frac{1}{2}I_{(2)}, \quad J_{(2)} = \frac{1}{8}[2I_{(4)} - I^2_{(2)}].$$

Такой выбор обусловлен тем, что в инерциальных системах отсчета псевдоевклидова пространства-времени инварианты $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$ имеют достаточно простой вид $J_{(1)} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$, $J_{(2)} = (\mathbf{E}\ \mathbf{H})^2$ и позволяют по их величине судить о взаимной ориентации векторов напряжен-

ностей электрического и магнитного полей и соотношении между квадратами их модулей. Инварианты же $I_{(2)}$ и $I_{(4)}$ имеют более сложный вид

$$I_{(2)} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2), \quad I_{(4)} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 4(\mathbf{E}\ \mathbf{H})^2$$

и поэтому оказываются менее удобными.

В этих обозначениях выражение для четвертой степени тензора F_{ik} электромагнитного поля принимает вид

$$F_{ik}^{(4)} = F_{ik}^{(2)} J_{(1)} + g_{ik} J_{(2)}. \tag{33.2}$$

Обобщая это равенство, запишем выражение для тензора $F_{ik}^{(4s)}$ в виде:

$$F_{ik}^{(4s)} = F_{ik}^{(2)} Q^{(s)} + g_{ik} P^{(s)}, \tag{33.3}$$

где $P^{(s)}$ и $Q^{(s)}$ – пока неизвестные функции от инвариантов $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$. Умножая последовательно соотношение (33.3) на $F_{m\cdot}^{\cdot i}$, $F_{m\cdot}^{(2)\ \cdot i}$ и $F_{m\cdot}^{(3)\ \cdot i}$, получим:

$$F_{mk}^{(4s+1)} = F_{ik}^{(3)} Q^{(s)} + F_{mk} P^{(s)}, \tag{33.4}$$

$$F_{mk}^{(4s+2)} = F_{ik}^{(2)} [P^{(s)} + J_{(1)} Q^{(s)}] + g_{mk} Q^{(s)} J_{(2)},$$

$$F_{mk}^{(4s+3)} = F_{ik}^{(3)} [P^{(s)} + J_{(1)} Q^{(s)}] + F_{mk} Q^{(s)} J_{(2)}.$$

Соотношения (33.3) и (33.4) исчерпывают всю бесконечную совокупность тензоров $F_{mk}^{(p)}$ $(p = 4, 5, 6, \ldots \infty)$.

Определим теперь функции $P^{(s)}$ и $Q^{(s)}$, входящие в эти выражения. Для этого умножим последнее из выражений (33.4) на $F_{i\cdot}^{\cdot m}$. В результате получим:

$$F_{ik}^{(4s+4)} = F_{ik}^{(2)} [J_{(1)} P^{(s)} + (J_{(1)}^2 + J_{(2)}) Q^{(s)}] +$$

$$+g_{ik}[P^{(s)} + J_{(1)}Q^{(s)}]J_{(2)}.$$

Так как индекс у этого тензора кратен четырем, то в силу определения (33.3) он должен иметь вид:

$$F_{ik}^{(4s+4)} = F_{ik}^{(2)}Q^{(s+1)} + g_{ik}P^{(s+1)}.$$

Сравнивая это соотношение с выражением (33.3), получим следующие рекуррентные уравнения для определения функций $Q^{(s)}$ и $P^{(s)}$:

$$P^{(s+1)} = [P^{(s)} + J_{(1)}Q^{(s)}]J_{(2)}. \tag{33.5}$$

$$Q^{(s+1)} = [J_{(1)}P^{(s)} + (J_{(1)}^2 + J_{(2)})Q^{(s)}].$$

Формальные начальные условия при $s = 0$ для этих уравнений, согласующиеся с выражениями (33.2) и (33.3), имеют вид: $Q^{(0)} = 0, P^{(0)} = 1$. Для решения этих уравнений воспользуемся предлагаемым нами методом, который в некоторой степени является обратным по отношению к методу, обычно используемому в теории функций Бесселя.

Построим производящие функции для $Q^{(s)}$ и $P^{(s)}$

$$h_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{(n)}\xi^n}{n!}, \quad h_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}\xi^n}{n!}. \tag{33.6}$$

Система уравнений (33.5) может быть получена после подстановки производящих функций (33.6) в систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_1}{d\xi} = [J_{(1)}^2 + J_{(2)}]h_1 + J_{(1)}h_2, \tag{33.7}$$

$$\frac{dh_2}{d\xi} = J_{(1)}J_{(2)}h_1 + J_{(2)}h_2$$

и разложения каждого из них в ряд по степеням ξ. Решая систему (33.7) стандартным методом с начальными условиями $h_1(0) = 0, h_2(0) = 1$, являющимися следствием условий $Q^{(0)} = 0, P^{(0)} = 1$, получим:

$$h_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}}\left\{\exp\left(\frac{\lambda_1\xi}{2}\right) - \exp\left(\frac{\lambda_2\xi}{2}\right)\right\},$$

$$h_2(\xi) = \frac{\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} - J_{(1)}}{2\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}}\exp\left(\frac{\lambda_1\xi}{2}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} + J_{(1)}}{2\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}}\exp\left(\frac{\lambda_2\xi}{2}\right),$$

где $\lambda_{1,2} = 2J_{(2)} + J_{(1)}^2 \pm J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}$).

Теперь для определения $Q^{(n)}$ и $P^{(n)}$ нам необходимо разложить эти функции в бесконечные ряды по степеням ξ и сравнить с выражением (33.6) коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях ξ.

В результате получим выражения, отчасти напоминающие последовательность Фибоначчи [20]:

$$Q^{(n)} = \frac{1}{2^n\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}}\left\{\lambda_1^n - \lambda_2^n\right\}, \tag{33.8}$$

$$P^{(n)} = \frac{1}{2^{n+1}}\left\{\lambda_1^n + \lambda_2^n\right\} - \frac{J_{(1)}}{2}Q^{(n)}.$$

При конечных значениях n $(n < \infty)$ $Q^{(n)}$ и $P^{(n)}$ представляют собой полиномы конечной степени от двух независимых инвариантов электромагнитного поля $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$. Таким образом, нами доказана

Теорема 33.1. Любая степень тензора электромагнитного поля $F_{ik}^{(n)}$ при $4 \leq n < \infty$ может быть выражена в явном виде через первые три степени этого тензора $F_{ik}^{(3)}$, $F_{ik}^{(2)}$, F_{ik}, метрический тензор и полиномы конечных степеней относительно независимых инвариантов электромагнитного поля $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$ по формулам (33.3), (33.4) и (33.8).

Сворачивая в выражениях (33.3) и (33.4) индексы, получим: $I_{(4s)} = 4P^{(s)} + 2J_{(1)}Q^{(s)}$,

$$I_{(4s+2)} = 4J_{(2)}Q^{(s)} + 2J_{(1)}[P^{(s)} + J_{(1)}Q^{(s)}].$$

Эти соотношения, с учетом выражений (33.2) и (33.8), дают в явном виде зависимость инвариантов электромагнитного поля высших степеней через два независимых инварианта $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$.

§ 34. Применение тензорных соотношений к задачам нелинейной электродинамики

В настоящее время в теории поля рассматривается несколько нелинейных обобщений уравнений Максвелла в вакууме. Среди них наиболее известными являются электродинамика Гейзенберга – Эйлера [21] и электродинамика Борна – Инфельда [22]. Эти модели нелинейной электродинамики основаны на совершенно различных принципах, в результате чего уравнения электромагнитного поля у них также различны.

В основе нелинейной электродинамики Гейзенберга – Эйлера, как известно, лежит квантовоэлектродинамический эффект поляризации электронно-позитронного вакуума электромагнитными полями. В этой теории точный вид лагранжиана пока не определен, однако при "малых" электромагнитных полях поправки к лагранжиану Максвелла в первом неисчезающем порядке теории возмущений квантовой электродинамики имеют строго определенный вид:

$$L = -\frac{1}{8\pi}[\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2] + \frac{\alpha}{360\pi^2 B_q^2}\left\{(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 7(\mathbf{B}\ \mathbf{E})^2\right\}, \tag{34.1}$$

где $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры, а $B_q = m^2c^2/e\hbar \sim 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс – квантовоэлектродинамическая индукция.

Борн и Инфельд в своих исследованиях исходили из идеи о том, что энергия электромагнитного поля точечной частицы должна быть конечной по величине. Эти и другие соображения привели их к следующему лагранжиану нелинейной электродинамики в вакууме:

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2}\left[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B}\ \mathbf{E})^2} - 1\right], \tag{34.2}$$

где a – постоянная, имеющая размерность, обратную размерности индукции магнитного поля.

Электродинамика Борна – Инфельда обладает целым рядом интересных свойств.

Во-первых, в ней собственная энергия электромагнитного поля точечного заряда действительно является конечной величиной.

Во-вторых, скорость электромагнитного сигнала в этой электродинамике, хотя и зависит от величины полей B^2 и E^2, но не превосходит скорость света c электродинамики Максвелла.

И, наконец, эта теория по своей идеологии тесно примыкает к идее Эйнштейна [5] о введении несимметричного метрического тензора $G_{ik} \neq G_{ki}$, симметричной частью которого служит обычный метрический тензор g_{ik}, а несимметрической частью – тензор электромагнитного поля F_{ik} :

$$G_{ik} = g_{ik} + aF_{ik}.$$

Используя соотношения тензорной алгебры (16.1) и (16.2), несложно показать, что

$$G = det||G_{ik}|| = g[1 - \frac{a^2}{2}F_{(2)} - \frac{a^4}{4}F_{(4)} + \frac{a^4}{8}F_{(2)}^2], \quad (34.3)$$

где $F_{(2)} = F_{ik}F^{ki}$, $F_{(4)} = F_{ik}F^{km}F_{mn}F^{ni}$ – инварианты тензора электромагнитного поля, а g – определитель метрического тензора.

В отсутствие гравитационного поля и при использовании декартовых координат инерциальной системы отсчета, входящие в это соотношение величины, имеют вид

$$g = -1, \; F_{(2)} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \; F_{(4)} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{B}\ \mathbf{E})^2.$$

Поэтому, используя выражение (34.3), лагранжиан (34.2) можно записать в виде:

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2}[\sqrt{-G} - \sqrt{-g}].$$

Следует также отметить, что электродинамику Борна – Инфельда можно получить исходя и из более общих суперсимметричных теорий.

Таким образом, электродинамика Борна – Инфельда во многих отношениях является выделенной теорией. Однако эта теория, хотя и имеет определенный лагранжиан, в большой степени феноменологична и для ее проверки [23] прежде всего необходимо на эксперименте измерить величину параметра a^2 или хотя бы оценить его величину сверху.

При достижимых в земных лабораториях полях величины $a^2\mathbf{E}^2$ и $a^2\mathbf{B}^2$ значительно меньше единицы. В этом случае лагранжиан (34.2) нелинейной электродинамики Борна – Инфельда можно разложить по малым параметрам $a^2\mathbf{E}^2 << 1$ и $a^2\mathbf{B}^2 << 1$:

$$L = -\frac{1}{8\pi}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) + \frac{a^2}{32\pi}\left[(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{B}\ \mathbf{E})^2\right]. \quad (34.4)$$

Первая часть этого разложения представляет собой лагранжиан электродинамики Максвелла, а остальная часть – нелинейную поправку к нему, пропорциональную указанным малым парамерам.

Сравнение выражений (34.1) и (34.4) показывает, что даже в приближении "слабого" электромагнитного поля теории Борна – Инфельда и Гейзенберга – Эйлера различны, так как никаким выбором постоянной a^2 эти выражения не свести одно к другому.

Уравнения электромагнитного поля нелинейной электродинамики в вакууме аналогичны уравнениям макроскопической электродинамики

$$rot\ \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad div\ \mathbf{D} = 0, \quad (34.5)$$

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad div\ \mathbf{B} = 0,$$

отличаясь от них смыслом векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D} = 4\pi\frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{H} = -4\pi\frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}}. \tag{34.6}$$

Используя выражения (34.6), несложно установить, что в нелинейной электродинамике Гейзенберга – Эйлера уравнения, связывающие векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ с векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, имеют вид:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 2\varepsilon[2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\mathbf{E} + 7(\mathbf{B}\ \mathbf{E})\mathbf{B}], \tag{34.7}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + 2\varepsilon[2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\mathbf{B} - 7(\mathbf{B}\ \mathbf{E})\mathbf{E}],$$

где $\varepsilon = \alpha/(90\pi B_q^2)$.

В нелинейной электродинамике Борна – Инфельда аналогичные уравнения имеют совершенно другой вид:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E} + a^2(\mathbf{B}\ \mathbf{E})\mathbf{B}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B}\ \mathbf{E})^2}}, \tag{34.8}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - a^2(\mathbf{B}\ \mathbf{E})\mathbf{E}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B}\ \mathbf{E})^2}}.$$

Таким образом, уравнения (34.7) и (34.8) являются нелинейными. Поэтому распространение электромагнитных волн во внешнем электромагнитном поле по законам нелинейной электродинамики вакуума оказывается эквивалентным [24,25] распространению электромагнитной волны в некотором эффективном псевдоримановом

пространстве-времени, метрический тензор которого g_{ik} зависит от внешнего электромагнитного поля.

Следует особо отметить, что при распространении электромагнитных волн во внешнем электромагнитном поле различные нелинейные модели электродинамики вакуума будут предсказывать различные выражения для этого метрического тензора. Однако метрический тензор эффективного пространства-времени g_{ik} является вполне измеряемой величиной: как показано в работе [26], исследуя законы распространения электромагнитных волн, всегда можно измерить компоненты тензора g_{ik} с точностью до общего конформного множителя. Поэтому изучая законы распространения электромагнитных волн во внешних электромагнитных полях, можно измерить компоненты метрического тензора g_{ik} и тем самым выяснить, какая из теоретических моделей нелинейной электродинамики вакуума наиболее полно согласуется с экспериментальными данными.

Найдем компоненты метрического тензора эффективного псевдориманова пространства-времени, предсказываемые нелинейными электродинамиками Гейзенберга - Эйлера и Борна – Инфельда, для случая, когда слабая электромагнитная волна частоты ω распространяется в поле интенсивного лазерного излучения частоты Ω.

Векторы магнитного и электрического полей первой из этих электромагнитных волн обозначим через $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$, а второй – через $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$. Тогда суммарные поля, входящие в выражения (34.7) и (34.8), примут вид:

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{e}.$$

Решим сначала поставленную задачу в нелинейной электродинамике Гейзенберга – Эйлера.

В нулевом приближении по векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ система нелинейных дифференциальных уравнений (34.5) при выполнении условий

$$\Omega^2 = \mathbf{K}^2 c^2, \quad (\mathbf{K}\ \mathbf{B}_0) = (\mathbf{K}\ \mathbf{B}_0^*) = 0$$

имеет решение в виде плоской эллиптически поляризованной волны

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\{\mathbf{B}_0 \exp[i(\Omega t - \mathbf{K}\ \mathbf{r})] + \mathbf{B}_0^* \exp[-i(\Omega t - \mathbf{K}\ \mathbf{r})]\}, \quad (34.9)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{c}{\Omega}[\mathbf{K}\ \tilde{\mathbf{B}}].$$

Так как эта волна поперечна и ее инварианты $\tilde{\mathbf{E}}^2 - \tilde{\mathbf{B}}^2$ и $(\tilde{\mathbf{B}}\ \tilde{\mathbf{E}})$ равны нулю, то в первом приближении по $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ выражения (34.7) примут вид:

$$\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{e} + \varepsilon\{8[(\tilde{\mathbf{E}}\ \mathbf{e}) - (\tilde{\mathbf{B}}\ \mathbf{b})]\tilde{\mathbf{E}} + 14[(\tilde{\mathbf{E}}\ \mathbf{b}) + (\tilde{\mathbf{B}}\ \mathbf{e})]\tilde{\mathbf{B}}\}, \quad (34.10)$$

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{b} + \varepsilon\{8[(\tilde{\mathbf{E}}\ \mathbf{e}) - (\tilde{\mathbf{B}}\ \mathbf{b})]\tilde{\mathbf{B}} - 14[(\tilde{\mathbf{E}}\ \mathbf{b}) + (\tilde{\mathbf{B}}\ \mathbf{e})]\tilde{\mathbf{E}}\}.$$

Представим векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 e^{iS}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_0 e^{iS},$$

где $S = S(t, \mathbf{r})$ – неизвестная функция и векторы $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{e}_0$ будем считать слабо изменяющимися функциями t и $\mathbf{r}$ по сравнению с функцией $\exp[iS(t, \mathbf{r})]$.

Подставляя выражения (34.10) в уравнения (34.5) и исключая вектор $\mathbf{b}$, получим однородную систему из трех линейных алгебраических уравнений относительно трех компонент вектора $e_\beta = (\mathbf{e})_\beta$:

$$\Pi^{\alpha\beta} e_\beta = 0, \quad (34.11)$$

где трехмерный тензор $\Pi^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \left[(\boldsymbol{\nabla} S)^2 - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon\Big\{8\Big[\frac{K_\alpha}{K}(\tilde{\mathbf{E}}\ \boldsymbol{\nabla} S) -$$

$$-\Big[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\boldsymbol{\nabla} S)}{K}\Big]\tilde{E}_\alpha\Big]\Big[\frac{K_\beta}{K}(\tilde{\mathbf{E}}\boldsymbol{\nabla} S) - \Big[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\boldsymbol{\nabla} S)}{K}\Big]\tilde{E}_\beta\Big] -$$

$$-14\Big[N_\alpha + \frac{1}{cK}\frac{\partial S}{\partial t}M_\alpha\Big]\Big[N_\beta + \frac{1}{cK}\frac{\partial S}{\partial t}M_\beta\Big]\Big\} - \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^\beta}$$

и для сокращения записи введены обозначения:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{K}\ \tilde{\mathbf{E}}], \qquad \mathbf{N} = [\boldsymbol{\nabla} S\ \tilde{\mathbf{E}}].$$

Условие $det\ ||\Pi^{\alpha\beta}|| = 0$ существования нетривиальных решений системы уравнений (34.11), как известно, дает дисперсионное уравнение.

Для того, чтобы представить это уравнение в компактной форме, воспользуемся формулами (11.19), (11.20) тензорной алгебры. Из этих формул следует, что условие $det||\Pi^{\alpha\beta}|| = 0$ может быть записано в виде:

$$2\Pi_{(3)} - 3\Pi_{(2)}\Pi_{(1)} + \Pi^3_{(1)} = 0. \qquad (34.12)$$

Подставляя в это соотношение инварианты степеней тензора $\Pi^{\alpha\beta}$, после сокращения на $(\partial S/\partial t)^2$ приходим к равенству:

$$\Big\{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\boldsymbol{\nabla} S)^2 + 8\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2\Big[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\ \boldsymbol{\nabla} S)}{K}\Big]^2\Big\}\times$$

$$\times\Big\{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\boldsymbol{\nabla} S)^2 + 14\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2\Big[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\ \boldsymbol{\nabla} S)}{K}\Big]^2\Big\} = 0,$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}}^2 = \frac{1}{2}\{(Re\ \mathbf{B}_0)^2 + (Im\ \mathbf{B}_0)^2 +$$

$$+[(Re\ \mathbf{B}_0)^2 - (Im\ \mathbf{B}_0)^2]\cos 2(\Omega t - \mathbf{K}\ \mathbf{r})\}.$$

Таким образом, в зависимости от поляризации слабой электромагнитной волны, распространяющейся в поле интенсивного лазерного излучения, функция $S = S(t, \mathbf{r})$, согласно нелинейной электродинамике Гейзенберга – Эйлера, должна удовлетворять одному из двух уравнений:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\boldsymbol{\nabla} S)^2 + 8\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2\left[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\ \boldsymbol{\nabla} S)}{K}\right]^2 = 0, \quad (34.13)$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\boldsymbol{\nabla} S)^2 + 14\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2\left[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\ \boldsymbol{\nabla} S)}{K}\right]^2 = 0.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения Гамильтона – Якоби

$$g^{nm}\frac{\partial S}{\partial x^n}\frac{\partial S}{\partial x^m} = 0$$

для безмассовой частицы, движущейся в эффективном пространстве-времени, метрический тензор которого зависит от поля сильной электромагнитной волны. Для первого типа слабых электромагнитных волн, удовлетворяющих первому из уравнений (34.13), имеем:

$$g^{00} = 1 + 8\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2, \qquad g^{0\alpha} = 8\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2\frac{K^\alpha}{K}, \qquad (34.14)$$

$$g^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\beta} + 8\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2\frac{K^\alpha K^\beta}{K^2}.$$

Для второго типа слабых электромагнитных волн получим аналогичные выражения:

$$g^{00} = 1 + 14\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2, \qquad g^{0\alpha} = 14\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2\frac{K^\alpha}{K}, \tag{34.15}$$

$$g^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\beta} + 14\varepsilon\tilde{\mathbf{B}}^2\frac{K^\alpha K^\beta}{K^2}.$$

Так как тензор кривизны R_{jnmk} для метрических тензоров (34.14) и (34.15), предсказываемых нелинейной электродинамикой Гейзенберга – Эйлера, тождественно равен нулю, то оба этих четырехмерных пространства являются псевдоевклидовыми.

Рассмотрим свойства метрических тензоров (34.14) и (34.15) в зависимости от поляризации сильной электромагнитной волны.

Для циркулярно поляризованной волны $(Re\ \mathbf{B}_0)^2 = (Im\ \mathbf{B}_0)^2$. В этом случае компоненты метрических тензоров (34.14) и (34.15) не зависят от координат и времени, но не являются диагональными. Это означает, что эти тензоры являются метрическими тензорами инерциальных систем отсчета, в которых, однако, скорость света зависит от направления распространения и поляризации слабой электромагнитной волны. Поэтому нелинейное воздействие циркулярно поляризованной сильной электромагнитной волны в вакууме на распространение слабой электромагнитной волны эквивалентно введению анизотропной среды.

Для линейно или эллиптически поляризованной волны $(Re\ \mathbf{B}_0)^2 \neq (Im\ \mathbf{B}_0)^2$, в результате чего выражения (34.14) и (34.15) являются функциями координат и времени и представляют собой компоненты метрических

тензоров неинерциальных систем отсчета, движущихся в псевдоевклидовом пространстве-времени. Поэтому воздействие сильной электромагнитной волны, не являющейся циркулярно поляризованной, на распространение слабой электромагнитной волны эквивалентно введению анизотропной среды и действию сил инерции неинерциальной системы отсчета в той области пространства, где эти волны взаимодействуют.

Нелинейная электродинамика Борна – Инфельда в рассматриваемой задаче дает только одно уравнение эйконала:

$$\left\{ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\boldsymbol{\nabla} S)^2 + a^2\tilde{\mathbf{B}}^2\left[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\ \boldsymbol{\nabla} S)}{K}\right]^2 \right\}^2 = 0. \tag{34.16}$$

Это уравнение также представляет собой уравнение Гамильтона – Якоби для безмассовой частицы, движущейся в эффективном пространстве-времени, метрический тензор которого зависит от поля сильной электромагнитной волны:

$$g^{00} = 1 + a^2\tilde{\mathbf{B}}^2, \qquad g^{0\alpha} = a^2\tilde{\mathbf{B}}^2\frac{K^\alpha}{K}, \tag{34.17}$$

$$g^{\alpha\beta} = -\delta^{\alpha\beta} + a^2\tilde{\mathbf{B}}^2\frac{K^\alpha K^\beta}{K^2}.$$

Так как тензор кривизны R_{jnml} для метрики (34.17) тождественно равен нулю, то и это пространство-время является псевдоевклидовым.

При $(Re\ \mathbf{B}_0)^2 \neq (Im\ \mathbf{B}_0)^2$ выражения (34.17) зависят от координат и времени и представляют собой компоненты метрического тензора неинерциальной системы

отсчета, движущейся в псевдоевклидовом пространстве-времени.

Сравнивая выражения (34.14), (34.15) и (34.17), можно сделать вывод, что даже в такой простой ситуации, как распространение слабой электромагнитной волны в поле интенсивного лазерного излучения, электродинамики Гейзенберга – Эйлера и Борна – Инфельда дают существенно различающиеся предсказания.

Наиболее ярко нелинейные свойства электродинамики вакуума должны проявляться в сильных электромагнитных полях. Такие поля макроскопических размеров в природе существуют только в окрестности нейтронных звезд. В частности, астрофизические наблюдения показывают, что у многих пульсаров магнитное поле на поверхности достигает значений $10^{12} - 10^{13}$ Гс, а у недавно открытых магнетаров до 10^{15} Гс.

Как показывают расчеты с использованием уравнения эйконала, нелинейно – электродинамическое воздействие магнитного поля нейтронных звезд на распространение электромагнитных волн должно приводить к эффектам, основными из которых являются: искривление лучей и появление зависимости скорости распространения электромагнитных сигналов от их поляризации и величины внешнего магнитного поля.

В результате магнитное поле нейтронных звезд для электромагнитного излучения служит своеобразной линзой, перераспределяя поток его энергии в пространстве. Кроме того, время распространения электромагнитных сигналов от одного и того же источника до детектора через магнитное поле нейтронной звезды зависит от их поляризации. Как показывают расчеты, величина запаз-

дывания сигнала, имеющего одно из двух главных поляризационных состояний, по сравнению с сигналом, имеющем другое главное поляризационное состояние, в отдельных случаях может доходить до вполне измеримой величины и составлять несколько микросекунд.

Таким образом, результаты, полученные при исследовании уравнения эйконала, могут служить основой для экспериментального изучения проявлений нелинейности электродинамики вакуума и выявления теории наиболее адекватной природе.

Следует отметить, что в научной литературе рассматриваются [27,28] и другие идеи экспериментов по исследованию нелинейной электродинамики вакуума. Один из таких экспериментов в настоящее время был проведен в Стэнфордском университете и показал [29], что электродинамика в вакууме действительно является нелинейной теорией. Поэтому ее различные предсказания заслуживают самого серьезного внимания.

ГЛАВА 8
ТЕНЗОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Гравитация в современной науке занимает особое положение. Эта теория затрагивает самые фундаментальные представления о пространстве-времени, материи и развитии Вселенной.

Для адекватного описания гравитации используются достаточно сложные в математическом отношении модели, включающие в себя нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка и оперирующие понятиями римановой геометрии, тензорного анализа, топологии и других разделов математики.

Поэтому для успешного решения различных задач теории гравитации необходимо не только привлекать всю мощь математических методов, разработанных к настоящему времени в математике, но и при решении многих вопросов разрабатывать новые математические методы.

§ 35. Уравнения Эйнштейна

В современной теории гравитации -- общей теории относительности Эйнштейна – полевой переменной является метрический тензор g_{mk} четырехмерного псевдориманова пространства-времени.

Плотность лагранжиана гравитационного поля L_g в

этой теории имеет вид:

$$L_g = -\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}R,$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-8}\text{см}^3\text{г}^{-1}\text{сек}^{-2}$ – гравитационная постоянная.

Плотность лагранжиана вещества L_M в общей теории относительности получают из соответствующего выражения, используемого в специальной теории относительности, записанного в произвольной криволинейной системе координат, путем замены метрического тензора псевдоевклидова пространства-времени γ_{mk} на метрический тензор псевдориманова пространства-времени g_{mk}.

Таким образом, плотность функции Лагранжа для гравитационного поля и вещества в теории Эйнштейна имеет вид:

$$L = -\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}R + L_M(g_{mk}, \varphi_A),$$

где φ_A – остальные поля материи.

Варьируя эту функцию по метрическому тензору g^{mn} псевдориманова пространства-времени, как по полевой переменной, получим уравнения гравитационного поля общей теории относительности:

$$R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{mn}, \qquad (35.1)$$

где R_{mn} – тензор Риччи, T_{mn} – тензор энергии-импульса вещества.

Уравнения (35.1) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, причем она является системой

гиперболического типа, так как ее характеристики совпадают с характеристиками волнового уравнения [11].

Теория Эйнштейна предсказала [30] знаменитые три эффекта (гравитационное красное смещение частоты, искривление луча света в гравитационном поле Солнца и аномальное смещение перигелия Меркурия) и получила широкую известность. Ее другие предсказания по широкому кругу вопросов – от эффектов, происходящих в слабом гравитационном поле Солнечной системы, до различных астрофизических процессов – постоянно находят подтверждения в наблюдательных данных.

Полученные экспериментальные данные со всей однозначностью показывают, что гравитация является нелинейным взаимодействием и для ее описания, следовательно, необходимо использовать нелинейные тензорные уравнения.

Задача

Используя уравнения Эйнштейна (35.1), выразить скалярную кривизну R и тензор Риччи R_{mn} через компоненты тензора энергии-импульса.

Решение. Свернем индексы m и n в уравнении (35.1). Учитывая, что в четырехмерном пространстве $g_{mn}g^{mn} = \delta_m^m = 4$, получим:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T, \tag{1}$$

где $T = T_{mn}g^{mn}$ – след тензора энергии-импульса вещества.

Подставляя выражение (1) в уравнения (35.1), найдем:

$$R_{mn} = \frac{8\pi G}{c^4}\left[T_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}T\right].$$

Таким образом, скалярная кривизна пространства-времени отлична от нуля только в тех областях пространства, где $T \neq 0$. Так как тензор энергии-импульса электромагнитного поля является бесследовым ($T = 0$), то с помощью электромагнитных полей создать скалярную кривизну пространства-времени невозможно.

§ 36. Нелинейные тензорные соотношения

При решении многих задач в общей теории относительности метрический тензор g_{ik} псевдориманова пространства-времени обычно записывают в виде:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + \Psi_{ik}, \tag{36.1}$$

где $g_{ik}^{(0)}$ – метрический тензор "фонового" пространства-времени, а Ψ_{ik} – сумма возмущений $h_{ik}^{(v)}$ метрического тензора g_{ik} до v-го порядка малости:

$$\Psi_{ik} = \sum_{s=1}^{v} h_{ik}^{(s)}. \tag{36.2}$$

При подстановке выражениий (36.1) и (36.2) в уравнения Эйнштейна (35.1) и разложении их в ряд теории возмущений обычно получают систему уравнений, позволяющую определить $h_{ik}^{(s)}$ до v-го порядка малости.

Аналогичные разложения используются, когда анализируется распространение возмущений гравитационного поля $h_{ik}^{(s)}$ на фоне точных решений уравнений Эйнштейна, таких, как решение Шварцшильда, космологические решения и другие.

Для того, чтобы провести указанные выше действия требуется построить выражения для определителя g метрического тензора g_{ik} и найти контравариантные компоненты g^{ni} этого тензора. Обычно для решения такой

задачи определитель g и компоненты метрического тензора g^{ni} записывают в виде бесконечного ряда по степеням тензора Ψ_{ik} и ограничиваются нахождением коэффициентов только у нескольких первых членов этого ряда.

Однако доказанные формулы о степенях тензора второго ранга позволяют [31] записать g и g^{ni} в явно тензорном виде.

Теорема 36.1. Определитель g метрического тензора (36.1) в теории Эйнштейна равен: $g = g^{(0)}D/24$, где $g^{(0)}$ - определитель метрического тензора $g_{ik}^{(0)}$,

$$D = [\Psi_{(1)}^4 + 4\Psi_{(1)}^3 + 12\Psi_{(1)}^2 + 24\Psi_{(1)} - 6\Psi_{(1)}^2\Psi_{(2)} - 12\Psi_{(1)}\Psi_{(2)} -$$

$$-12\Psi_{(2)} + 8\Psi_{(1)}\Psi_{(3)} + 3\Psi_{(2)}^2 + 8\Psi_{(3)} - 6\Psi_{(4)} + 24] \quad (36.3)$$

и степени тензора Ψ_{ik} и их инварианты $\Psi_{(1)}$, $\Psi_{(2)}$, $\Psi_{(3)}$, $\Psi_{(4)}$ строятся с помощью метрического тензора $g_{ik}^{(0)}$ фонового пространства-времени.

Доказательство. Используя соотношение (16.2) и полагая в нем $\Phi_k^m = \delta_k^m + \Psi_k^m$, после несложных вычислений будем иметь: $det\|\delta_k^m + \Psi_k^m\| = D/24$. Учитывая, что в силу уравнения связи (36.1)

$$det\|\delta_k^m + \Psi_k^m\| = det\|g^{(0)mi}\| \cdot det\|g_{ik}\|,$$

а также применяя известную теорему об определителе обратной матрицы, приходим к соотношению (36.3), что и требовалось доказать.

Теорема 36.2. Контравариантный метрический тензор g^{mi}, обратный к тензору (36.1), в общей теории относительности Эйнштейна имеет вид:

$$g^{mi} = -\frac{1}{D}\{24\Psi_{(3)}^{mi} - 24\Psi_{(2)}^{mi}(1 + \Psi_{(1)}) + \quad (36.4)$$

$$+12\Psi^{mi}(2+2\Psi_{(1)}+\Psi^2_{(1)}-\Psi_{(2)})-$$

$$-4g^{(0)mi}(6+6\Psi_{(1)}+3\Psi^2_{(1)}-3\Psi_{(2)}-3\Psi_{(1)}\Psi_{(2)}+2\Psi_{(3)}+\Psi^3_{(1)})\}.$$

Доказательство. Подставим в выражение (16.3) невырожденный тензор

$$\Phi^{nm}=g^{(0)ni}g^{(0)mk}g_{ik}. \tag{36.5}$$

Учтем, что в этом случае обратный тензор χ^{nm} будет совпадать с контравариантным метрическим тензором $\chi^{nm}=g^{nm}$. Тогда после подстановки выражения (36.1) в выражения (36.5) и (16.3) и тождественных преобразований получим соотношение (36.4). Теорема доказана.

Подставляя выражения (36.1) и (36.4) в равенство $g_{ik}(x)g^{km}(x)=\delta_i^m$, легко убедиться, что оно выполняется в силу тензорного соотношения (16.1).

Таким образом, определитель g метрического тензора g_{ik} псевдориманова пространства-времени и контравариантные компоненты g^{ni} этого тензора могут быть представлены в виде компактных тензорных выражений, содержащих четыре степени тензора Ψ_{ik}, их инварианты и метрический тензор $g^{(0)}_{ik}$ фонового пространства-времени.

Совершенно аналогично, если уравнение, связывающее метрический тензор псевдориманова пространства-времени с метрическим тензором фонового пространства-времени, задано в контравариантной форме

$$g^{ik}=g^{(0)ik}+\Psi^{ik}, \tag{36.6}$$

то ковариантные компоненты этого тензора имеют вид:

$$g_{km}=-\frac{1}{D}\{24\Psi^{(3)}_{km}-24\Psi^{(2)}_{km}\cdot[1+\Psi_{(1)}]+ \tag{36.7}$$

$$+12\Psi_{km}\cdot[2+2\Psi_{(1)}+\Psi^2_{(1)}-\Psi_{(2)}]-$$

$$-4g^{(0)}_{km}\cdot[6+6\Psi_{(1)}+3\Psi^2_{(1)}-3\Psi_{(2)}-3\Psi_{(1)}\Psi_{(2)}+2\Psi_{(3)}+\Psi^3_{(1)}]\}.$$

В этом случае для определителя метрического тензора (36.6) получаем выражение:

$$det||g^{ik}|| = \frac{D}{24g^{(0)}}. \qquad (36.8)$$

Полученные выражения (36.3), (36.4), (36.7) и (36.8) позволяют значительно упростить проведение различных вычислений в общей теории относительности Эйнштейна. Однако для их использования необходимо установить при каких условиях метрический тензор g_{ik} будет невырожденным. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 36.3. Для невырожденности метрического тензора псевдориманова пространства-времени в общей теории относительности необходимо и достаточно, чтобы ни одно из собственных значений тензора гравитационного поля Ψ_{ik} не равнялось минус единице.

Для доказательства этой теоремы отметим прежде всего, что условие невырожденности метрического тензора риманова пространства-времени в указанных теориях гравитации в силу теорем 36.1 и 36.2 эквивалентно условию $D \neq 0$. Найдем сначала выражение для D. Используя формулу Ньютона [32], инварианты степеней тензора Ψ_{ik} мы можем выразить через четыре собственных значения λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 тензора гравитационного поля: $J_p = \lambda_0^p + \lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p$.

Подставляя это соотношение в выражение (36.3), после приведения подобных получим:

$$D = 24(1+\lambda_0)\cdot(1+\lambda_1)\cdot(1+\lambda_2)\cdot(1+\lambda_3). \qquad (36.9)$$

Необходимость. Для того чтобы $D \neq 0$ необходимо, чтобы ни один из сомножителей выражения (36.9) не обращался в нуль:

$$(1+\lambda_0) \neq 0,\ (1+\lambda_1) \neq 0,\ (1+\lambda_2) \neq 0,\ (1+\lambda_3) \neq 0.$$

Отсюда следует небходимость выполнения условий

$$\lambda_0 \neq -1,\ \lambda_1 \neq -1,\ \lambda_2 \neq -1,\ \lambda_3 \neq -1.$$

Достаточность. Пусть ни одно из собственных значений тензора гравитационного поля не равно минус единице. Тогда из соотношения (36.9) получим: $D \neq 0$. Теорема доказана.

§ 37. Уравнение геодезической

Понятие о геодезической линии, как следует из ее названия (от греческого ge ′ – Земля + dasomai – делю на части), возникло в геодезии – науке, занимающейся изучением размеров и формы Земли.

Геодезической линией (или просто, геодезической) в геодезии называют кратчайшую линию, соединяющую две точки на земном шаре или, что более точно, на геоиде. При переходе от двумерных пространств, каким является поверхность Земли, к произвольным N-мерным пространствам основная идея этого определения сохраняется. Геодезической линией, соединяющей точки A и B произвольного псевдориманова пространства $R^N_{p,N-p}$ называется кривая экстремальной длины.

Так как в пространстве $R^N_{p,N-p}$ квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками определяется выражением (3.2), то длина линии, соединяющей точки A

и B этого пространства, может быть представлена криволинейным интегралом:

$$l = \int_A^B ds. \tag{37.1}$$

Уравнение линии, длина которой достигает экстремума, может быть получено из условия обращения в нуль первой вариации функционала (37.1): $\delta l = 0$. Так как при таком варьировании точки A и B предполагаются фиксированными, то условие $\delta l = 0$ принимает вид:

$$\int_A^B \delta ds = 0. \tag{37.2}$$

Явное выражение для δds, с учетом определения (3.2), удобно записать в виде:

$$\delta ds = \frac{1}{2ds}\delta[g_{ik}(x)dx^i dx^k] =$$

$$= \left[\frac{ds}{2}u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\delta x^n + d(u_n \delta x^n) - \delta x^n du_n\right],$$

где $u^i = dx^i/ds$ – касательный четырехвектор.

Подставляя полученное выражение для δds в условие (37.2) и учитывая, что $\delta x^n = 0$ в точках A и B, будем иметь:

$$\int_A^B \left\{\frac{1}{2}u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n} - \frac{du_n}{ds}\right\} ds \delta x^n = 0.$$

Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, обращается в нуль при любом выборе функции δx^n. Поэтому в силу основной леммы вариационного исчисления выражение, стоящее в фигурных скобках, при $ds \neq 0$ должно быть равным нулю:

$$\frac{du_n}{ds} - \frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n} = 0. \tag{37.3}$$

Преобразуем полученное уравнение. Учитывая определение (6.4) и правило (3.8) поднятия и опускания тензорных индексов, уравнение (37.3) приведем к виду:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{nm} u^n u^m = 0. \tag{37.4}$$

Полученное уравнение называется уравнением геодезической линии в произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,\ N-p}$. Используя понятие ковариантного (абсолютного) дифференциала $Du^i = du^i + \Gamma^i_{kn} u^k dx^n$, уравнение (37.4) можно переписать в другом виде:

$$\frac{Du^i}{Ds} = 0.$$

Отсюда следует, что $Du^i = 0$, а это условие означает, что в произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,\ N-p}$ касательный вектор u^i переносится параллельно вдоль геодезической линии.

Условием применимости уравнения геодезической линии (37.4) является неравенство нулю интервала ds. В псевдоримановых пространствах $R^N_{1,N-1}$ это уравнение описывает движение массивных частиц.

Уравнения геодезических для безмассовых частиц имеют иной вид:

$$\frac{dK^i}{d\sigma} + \Gamma^i_{nm} K^n K^m = 0, \qquad (37.5)$$

где σ – некоторый параметр, $K^i = dx^i/d\sigma$ – волновой четырехвектор.

Этот четырехвектор является изотропным, так как удовлетворяет условию для электромагнитных лучей: $K^i K^n g_{in} = 0$.

§ 38. Решение Шварцшильда

Характеризуя уравнения гравитационного поля в теории Эйнштейна с математической точки зрения, следует отметить, что они представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Отсутствие общих методов интегрирования таких систем уравнений приводит к тому, что поиск возможных решений уравнений Эйнштейна и анализ различных экспериментальных следствий оказываются существенно затрудненными. К настоящему времени, несмотря на большие усилия мирового сообщества математиков и физиков, в общей теории относительности найдены только самые простые частные точные решения [33] уравнений гравитационного поля, когда число отличных от нуля компонент метрического тензора мало и эти компоненты зависят только от одной или двух координат.

Первое точное решение нелинейных дифференциальных уравнений общей теории относительности было получено К.Шварцшильдом.

Метрика Шварцшильда, описывающая гравитационное поле вне сферически симметричного источника массы M, была найдена в 1916 году, вскоре после опубликования Эйнштейном уравнений гравитационного поля в общей теории относительности. В стандартных сферических координатах она имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{rdr^2}{(r - r_g)} - r^2[d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2], \quad (38.1)$$

где $r_g = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус тела.

Метрика (38.1) в настоящее время широко используется для анализа различных вопросов, начиная от тонких гравитационных эффектов, проявляющихся в движении массивных и безмассовых частиц в гравитационном поле планет и звезд, до процессов, происходящих в непосредственной окрестности черных дыр.

Параметр r_g/r, входящий в выражение (38.1) и показывающий отклонение метрики (38.1) от метрики Минковского, обычно очень мал. В частности, для Земли $r_g = 0.9$ см, в результате чего на ее поверхности, при $r = 6.3 \cdot 10^3$ км, этот параметр принимает значение $r_g/r \sim 10^{-9}$. Несколько больших значений параметр r_g/r достигает на поверхности Солнца. Учитывая, что для Солнца $r_g \sim 3$ км, $r \sim 7 \cdot 10^5$ км, получим $r_g/r \sim 10^{-6}$. Тем не менее, малое отклонение метрики Шварцшильда (38.1) от метрики Минковского (25.2) в этом случае проявляется не только в существовании ньютоновской части тяготения, но и в других эффектах.

В природе также существуют и объекты, у которых параметр r_g/r близок к единице.

Обсудим наиболее важные эффекты, которые могут происходить в гравитационном поле статического сферически симметричного источника. Для этого изучим законы движения массивных частиц и фотонов в гравитационном поле (38.1). Это удобно сделать на основе уравнения Гамильтона – Якоби для частицы с массой m_0 :

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m_0^2c^2.$$

Подставляя в это уравнение контравариантные компоненты метрического тензора метрики Шварцшильда (38.1) и решая полученное уравнение методом разделения переменных, найдем:

$$S = -E_0t+\alpha\varphi\pm\int\frac{rdr}{(r-r_g)}\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2}-\left(m_0^2c^2+\frac{\alpha^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)},$$

где E_0 и α – константы.

Компоненты четырехимпульса частицы p_i в методе Гамильтона – Якоби можно получить из уравнения: $p_i = -\partial S/\partial x^i$. В результате будем иметь;

$$p^0 = \frac{E_0r}{c(r-r_g)}, \qquad p^\varphi = \frac{\alpha}{r^2}, \tag{38.2}$$

$$p^r = \pm\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2}-\left(m_0^2c^2+\frac{\alpha^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)},$$

где знак плюс соответствует движению от центра, а минус – к центру.

Рассмотрим сначала радиальное движение, когда $\alpha = 0$. Так как $p^i = m_0cu^i$, то комбинируя соотношения

(38.2), запишем:

$$dt = \frac{p^0 dr}{cp^r} = \pm \frac{rE_0 dr}{c^2(r - r_g)\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}, \qquad (38.3)$$

$$d\tau = \frac{ds}{c} = m_0 \frac{dx^0}{p^0} = \pm \frac{m_0 dr}{\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

где t – время, измеряемое по часам наблюдателя, находящегося вдали от источника тяготения, а τ – собственное время, измеряемое по часам, движущимся вместе с рассматриваемой частицей.

Предположим, что частица движется к тяготеющему центру и в начальный момент времени $t = t_0$, $\tau = \tau_0$ была в точке $r = r_0 > r_g$. Интегрируя уравнения (38.3), найдем закон движения этой частицы по часам удаленного наблюдателя $t = t(r)$ и по собственному времени $\tau = \tau(r)$:

$$t(r) = t_0 + \frac{E_0}{c^2} \int\limits_r^{r_0} \frac{rdr}{(r - r_g)\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

$$\tau(r) = \tau_0 + m_0 \int\limits_r^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}.$$

Из этих выражений следует, что при стремлении $r \to r_g$ подынтегральное выражение первого интеграла имеет

особенность вида $(r - r_g)^{-1}$, а подынтегральное выражение второго интеграла особенности не имеет. Отсюда следует, что время приближения (падения) любой частицы от $r = r_0$ к $r = r_g$ будет бесконечно большим по часам удаленного наблюдателя и конечным по собственным часам сопутствующего наблюдателя.

Этот парадоксальный, на первый взгляд, результат является одним из основных эффектов, происходящих в гравитационном поле черных дыр – массивных объектов, радиус которых меньше радиуса Шварцшильда.

В слабом же гравитационном поле тел Солнечной системы $r_g/r << 1$, в результате чего гравитационные эффекты, предсказываемые общей теорией относительности, проявляются также слабо. Одним из них является эффект гравитационного искривления луча электромагнитной волны: если луч проходит на расстоянии r_0 от тяготеющего центра, то он отклоняется от первоначального направления на угол

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{r_0}.$$

Этот угол очень мал. В случае луча, касающегося диска Солнца, $\delta\varphi = 1.75''$.

Другим эффектом, предсказанным общей теорией относительности, является смещение перигелиев планет: перигелий планеты за каждый оборот по орбите смещается навстречу движению планеты на угол

$$\delta\varphi = \frac{3\pi r_g}{a(1 - e^2)},$$

где e – эксцентриситет орбиты, a – ее большая полуось.

Этот угол также очень мал. Среди планет Солнечной системы наибольшее значение угла $\delta\varphi$ смещения перигелия имеет Меркурий: $\delta\varphi = 43''$ за 100 лет. Однако несмотря на свою малость, перечисленные эффекты были обнаружены в наблюдательных данных и подтвердили предсказания теории гравитации Эйнштейна.

§ 39. Слабые гравитационные волны

Гравитационные волны, как известно, являются одним из наиболее красивых предсказаний общей теории относительности Эйнштейна. Возможность распространения возмущений метрического тензора в виде волн в этой теории следует [11] как из гиперболического типа уравнений Эйнштейна, записанных в их нелинейном виде, так и из линейных уравнений [34], получаемых в первом порядке теории возмущений.

Согласно уравнениям общей теории относительности любой материальный объект, у которого зависящая от времени часть тензора энергии-импульса не обладает аксиальной симметрией, должен излучать гравитационные волны. Однако все попытки зарегистрировать гравитационные волны или какие-либо их проявления достаточно долгое время оканчивались неудачей. Поэтому в научной литературе иногда высказывались сомнения о реальности существования гравитационных волн.

Эта ситуация кардинально изменилась лишь в самое последнее время, после того как наблюдения за двойной пульсарной системой PSR 1913+16, начатые еще в 1975 году, показали [35], что эта система теряет энергию на излучение гравитационных волн в соответствии с предсказаниями общей теории относительности Эйнштейна.

Этот важный результат, как известно, был отмечен присуждением Р. Халсу и Дж. Тэйлору Нобелевской премии по физике 1994 года.

Таким образом, в настоящее время сомнения в существовании гравитационных волн исчезли и на первый план выходит вопрос о их регистрации в земных условиях. Однако из-за малости константы гравитационного взаимодействия сделать это не просто. Поэтому в настоящее время одной из важнейших задач теории гравитации является теоретический анализ процессов, приводящих к излучению и регистрации гравитационных волн, и поиск путей к практическому овладению гравитационно-волновым каналом связи.

Рассмотрим слабое гравитационное поле. Метрический тензор псевдориманова пространства-времени g_{mn} в таком поле, очевидно, будет мало отличаться от метрического тензора псевдоевклидова пространства-времени γ_{mn}. Тогда тензор g_{mn} можно представить в виде абсолютно сходящегося ряда по степеням некоторой малой амплитуды гравитационного поля:

$$g_{mn} = \gamma_{mn} + \varphi^{(1)}_{mn} + \varphi^{(2)}_{mn} + \ldots, \tag{39.1}$$

где $\varphi^{(1)}_{mn}$ – поправка первого порядка малости, $\varphi^{(2)}_{mn}$ – поправка второго порядка малости и т.д.

Подставляя разложение (39.1) в левую часть уравнений гравитационного поля (35.1), получим:

$$R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R = \left[R^{(1)}_{mn} - \frac{1}{2}\gamma_{mn}R^{(1)}\right] + \ldots$$

Совершенно аналогично разложим в ряд по тому же малому параметру и тензор энергии-импульса вещества,

входящий в правую часть уравнений (35.1):

$$T_{mn} = T_{mn}^{(0)} + T_{mn}^{(1)} + T_{mn}^{(2)} + \ldots,$$

где $T_{mn}^{(0)}$ – исходный невозмущенный тензор энергии-импульса, $T_{mn}^{(1)}$ – возмущение тензора энергии-импульса, линейное по амплитуде гравитационной волны и т.д.

Подставляя эти разложения в уравнения (35.1) и ограничиваясь лишь первым порядком, получим:

$$R_{mn}^{(1)} - \frac{1}{2}\gamma_{mn}R^{(1)} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{mn}^{(0)}. \tag{39.2}$$

Запишем уравнение (39.2) в галилеевской системе координат, где тензор γ_{mn} имеет вид (25.1):

$$\frac{\partial^2\varphi_m^k}{\partial x^n\partial x^k} + \frac{\partial^2\varphi_n^k}{\partial x^m\partial x^k} - \frac{\partial^2\varphi_k^k}{\partial x^m\partial x^n} - \gamma^{ki}\frac{\partial^2\varphi_{mn}}{\partial x^k\partial x^i} + \tag{39.3}$$

$$+\gamma_{mn}\left[\gamma^{ki}\frac{\partial^2\varphi_j^j}{\partial x^k\partial x^i} - \frac{\partial^2\varphi^{ki}}{\partial x^i\partial x^k}\right] = \frac{16\pi G}{c^4}T_{mn},$$

где введены обозначения $T_{mn} = T_{mn}^{(0)}$, $\varphi_{mn} = \varphi_{mn}^{(1)}$.

В приведенных выражениях индексы поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора γ_{mn}, как это требуется в рассматриваемом приближении. Дальнейшее упрощение уравнения (39.3) достигается введением новой переменной – тензора Ψ_{mn}:

$$\varphi_{mn} = \Psi_{mn} - \frac{1}{2}\gamma_{mn}\Psi_k^k. \tag{39.4}$$

Уравнение (39.3) с учетом выражения (39.4) дает:

$$\frac{\partial^2 \Psi^k_m}{\partial x^n \partial x^k} + \frac{\partial^2 \Psi^k_n}{\partial x^m \partial x^k} - \gamma^{ki} \frac{\partial^2 \Psi_{mn}}{\partial x^k \partial x^i} - \gamma_{mn} \frac{\partial^2 \Psi^{ki}}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{mn}. \tag{39.5}$$

Несложно убедиться, что при малых преобразованиях координат $x'^i = x^i + \xi^i(x)$ величина φ_{mn} не изменяет свой порядок малости, хотя сама и изменяется:

$$\varphi'_{mn} = \varphi_{mn} - \frac{\partial \xi_m}{\partial x^n} - \frac{\partial \xi_n}{\partial x^m}.$$

В результате такого преобразования имеем:

$$\Psi'_{mn} = \Psi_{mn} - \frac{\partial \xi_m}{\partial x^n} - \frac{\partial \xi_n}{\partial x^m} + \gamma_{mn} \frac{\partial \xi_n}{\partial x^n}.$$

Этим произволом в определении Ψ_{mn} обычно [11] пользуются, чтобы еще больше упростить уравнения (39.5). В частности, четырехвектор $\xi^i(x)$ выбирают так, чтобы выполнялось дополнительное условие:

$$\frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x^n} = 0. \tag{39.6}$$

Это условие в научной литературе получило название дополнительного условия Гильберта – де-Дондера – Фока. При выполнении условия (39.6) уравнения (39.5) принимают вид:

$$\Box \Psi_{mn} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{mn}, \tag{39.7}$$

где $\Box$ – оператор Даламбера:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Таким образом, при заданном тензоре энергии-импульса вещества $T_{mn} = T_{mn}(\mathbf{r}, t)$ уравнение (39.7) позволяет определить создаваемое гравитационное поле.

§ 40. Уравнения Максвелла при наличии слабых гравитационных волн

Изучение взаимодействия гравитационных волн с электромагнитными полями в настоящее время получило особую актуальность, так как получаемые результаты служат теоретической основой для предпринимающихся в последнее время усилий по детектированию гравитационных волн с помощью лазерно-интерферометрических устройств.

При распространении гравитационных волн во внешних электромагнитных полях в результате взаимодействия этих волн возникает электромагнитное излучение. Этот процесс в настоящее время рассматривается как один из основных процессов, с помощью которого предполагается проводить регистрацию высокочастотных гравитационных волн в лабораторных и в астрофизических условиях.

Как показывают расчеты, в области высоких частот излучатели и детекторы гравитационных волн этого типа оказываются более эффективными по сравнению с механическими системами. Поэтому перспективы овладения радио, СВЧ и оптическим диапазонами гравитационно-волнового канала связи во многом будут зависеть от успехов в разработке излучателей и детекторов гравитационных волн этого типа.

С математической точки зрения задача о воздействии гравитационных волн на электромагнитные поля

сводится к решению общековариантных уравнений Максвелла [36]

$$\nabla_k F^{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g} F^{ik}] = -\frac{4\pi}{c} j^i, \tag{40.1}$$

$$\nabla_m F_{ik} + \nabla_i F_{km} + \nabla_k F_{mi} = 0$$

в псевдоримановом пространстве-времени, метрический тензор g_{ik} которого содержит волновую часть $\Phi_{ik}(\mathbf{r}, t)$:

$$g_{ik} = \gamma_{ik} + \Phi_{ik}(\mathbf{r}, t). \tag{40.2}$$

Если ввести четырехмерный вектор-потенциал A_i с помощью соотношения

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

то второе уравнение системы (40.1) будет удовлетворяться тождественно.

Тогда первое из уравнений (40.1) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\sqrt{-g} g^{im} g^{kn} \left(\frac{\partial A_n}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^n} \right) \right] = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{40.3}$$

Теперь нам необходимо найти выражения для контравариантных компонент и определителя метрического тензора через его ковариантные компоненты (40.2) и подставить в уравнение (40.3).

При наличии слабых гравитационных волн, распространяющихся на фоне плоского пространства-времени, Φ_{ik} обычно является известной функцией координат и

времени и $\gamma = -1$. Поэтому выражения (36.3) и (36.4) можно разложить в ряды по малому параметру $\Psi_0 \ll 1$ – амплитуде слабой гравитационной волны: $\Phi_{ik} = \Psi_0 S_{ik}$.

Следует отметить, что в силу ТТ-калибровки гравитационной волны и условия Гильберта – де-Дондера – Фока тензор S^{ik} удовлетворяет соотношениям:

$$S^i_i = 0, \quad S_{0k} = 0, \quad \frac{\partial S^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

Аналогичному разложению подвергается также и четырехвектор тока

$$j^i = j^i_{(0)} + \Psi_0 j^i_{(1)} + \Psi_0^2 j^i_{(2)} + \cdots, \tag{40.4}$$

где $j^i_{(0)}$ – исходный невозмущенный гравитационной волной четырехвектор тока, а $\Psi_0^P j^i_{(P)}$ – поправки к четырехвектору тока в P-ом порядке приближения, обусловленные влиянием гравитационных волн на движение источника тока.

Четырехпотенциал A_i в этом случае следует искать также в виде разложения по малому параметру :

$$A_i = A_i^{(0)} + \Psi_0 A_i^{(1)} + \Psi_0^2 A_i^{(2)} + \cdots, \tag{40.5}$$

где $A_i^{(0)}$ – четырехпотенциал исходного невозмущенного электромагнитного поля, $\Psi_0^P A_i^{(P)}$ – поправки к четырехпотенциалу в P-ом порядке теории возмущений, возникающие в результате воздействия гравитационных волн.

Подставляя выражения (40.4) и (40.5) в уравнение (40.3), разлагая полученное соотношение в ряд по степеням Ψ_0 и приравнивая нулю выражения, играющие роль

коэффициентов этого ряда, мы получим уравнение Максвелла в приближении P-го порядка.

Ограничиваясь приближением первого порядка по Ψ_0, имеем

$$\Box A^m_{(0)} = -\frac{4\pi}{c} j^m_{(0)}, \tag{40.6}$$

$$\Box A^m_{(1)} = -\frac{4\pi}{c} j^m_{(1)} - j^m_{int},$$

где введены следующие обозначения:

$$j^0_{int} = -div\ \mathbf{P}, \qquad \mathbf{j}_{int} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^0} + rot\ \mathbf{M}, \tag{40.7}$$

$$P^\alpha = \Phi^{\alpha\beta} E^{(0)}_\beta, \qquad M^\alpha = \Phi^{\alpha\beta} H^{(0)}_\beta.$$

Запись компонент четырехвектора тока j^i_{int} в этой форме показывает, что уравнения Максвелла при наличии гравитационных волн становятся эквивалентными уравнениям электродинамики в материальных средах с диэлектрической и магнитной проницаемостями, зависящими от координат и времени.

Таким образом, для расчета взаимодействия слабых гравитационных волн с электромагнитным полем сначала необходимо по заданному распределению зарядов и токов в отсутствие гравитационных волн из первого уравнения системы (40.6) определить исходное невозмущенное электромагнитное поле $E^{(0)}_\beta$ и $H^{(0)}_\beta$. Затем, используя полученное решение, а также поправку к четырехвектору тока, линейную по Ψ_0, из второго уравнения системы (40.6) можно найти линейную поправку $A^i_{(1)}$ к четырехпотенциалу, возникающую в результате воздействия гравитационных волн на систему.

Уравнения (40.6) необходимо дополнить начальными и граничными условиями, обеспечивающими единственность их решения. В качестве таковых в электродинамике обычно используются условия излучения Зоммерфельда [37] и условия на границе раздела двух сред:

$$E_\tau^I = E_\tau^{II}, \qquad B_N^I = B_N^{II},$$

$$[\mathbf{N}(\mathbf{H}^I - \mathbf{H}^{II})] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}_{sur}, \quad D_N^I - D_N^{II} = 4\pi\rho_{sur},$$

где индекс τ обозначает касательные составляющие векторов, а N – нормальные.

Диаграмму направленности электромагнитного излучения, возникающего в результате воздействия гравитационной волны на электромагнитное поле, можно исследовать по обычной формуле:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \lim_{r\to\infty} \frac{cr^2}{4\pi}\mathbf{E}_{(1)}^2 = \lim_{r\to\infty} \frac{cr^2}{4\pi}\mathbf{H}_{(1)}^2,$$

где dI – интенсивность электромагнитного излучения в элемент телесного угла $d\Omega$.

Специфической особенностью задач о превращении гравитационных волн в электромагнитные волны при их распространении во внеших стационарных электромагнитных полях является то, что источники (40.7), стоящие в правой части второго уравнения системы (40.6), имеют достаточно сложный вид и заданы во всем пространстве, т.е. линейные размеры L области, занятой источниками, оказываются неограниченными ($L \to \infty$). Поэтому в таких задачах отсутствует обычно используемый в математической физике малый параметр L/r , позволяющий проводить мультипольное разложение решения этих уравнений в виде запаздывающих потенциалов.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1982.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1994.
3. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. - М.: Наука, 1986.
4. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. - М.: Наука, 1966.
5. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. - М.: Наука, 1965.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1973.
7. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: Наука, 1967.
8. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Г. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.- М.: Наука, 1978.
10. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. - М.: Наука, 1966.
11. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. - М.: Физматгиз, 1961.
12. Бондарев А.Л. Новое тождество в пространстве Минковского и некоторые его применения. // Теоретическая и математическая физика, 1994, т. 101, № 2, с. 315.
13. Григорьев В.И., Денисова И.П. Некоторые новые соотношения тензорной алгебры. //Вестник Московского университета, сер. 3, 1996, № 2, с. 3.
14. Denisova I.P., Mehta B.V. Tensor expressions for solving Einstein's equations by the method of sequential approximation. //General Relativity and Gravitation, 1997, v. 29, № 5, p. 583.

15. Григорьев В.И., Денисова И.П. Некоторые новые соотношения для тензора электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве-времени. //Вестник Московского Университета, сер.3, 1997, № 5, с. 15.
16. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988.
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971.
18. Денисова И.П. Теорема об общих соотношениях для тензора второго ранга в четырехмерном римановом пространстве. //Известия Вузов. Математика, 2001, № 3(466), с. 75.
19. Малыкин Г.Б. Эффект Саньяка. Корректные и некорректные объяснения. //Успехи физических наук, 2000, т. 170, № 12, с. 1325.
20. Математическая энциклопедия. - М.: Сов. энциклопедия, 1985, т. 1-5.
21. Халилов В.Р. Электроны в сильном магнитном поле. - М.: Энергоатомиздат, 1988.
22. Born M., Infeld L. Foundations of the new field theory. //Proc. Roy. Soc., 1934, v. A144, p. 425.
23. Denisov V.I. Nonlinear effect of quantum electrodynamics for experiments with a ring laser. //Journ. of Optics, 2000, v. 2, № 5, p. 372.
24. Денисов В.И., Денисова И.П. Проверяемый пост-максвелловский эффект нелинейной электродинамики в вакууме. //Оптика и спектроскопия, 2001, т. 90, № 2, с. 359.
25. Денисов В.И., Денисова И.П. Уравнение эйконала в параметризованной нелинейной электродинамике вакуума. //Доклады РАН, 2001, т. 378, № 4, с. 463.
26. Паули В. Теория относительности. - М.: Наука, 1991.
27. Александров Е.Б., Ансельм А.А., Москалев А.Н. Двулучепреломление вакуума в поле интенсивного лазерного излучения. //ЖЭТФ, 1985, т. 89, № 4, с. 1181.
28. Розанов Н.Н. О самовоздействии интенсивного электромагнитного излучения в электрон-позитронном вакууме. //ЖЭТФ, 1998, т. 113, № 2, с. 513.

29. Burke D.L. et al. Positron production in multiphoton light-by-light scattering. //Physical Review Letters, 1997, v. 79, № 9, p. 1626.
30. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. - М.: Энергоатомиздат, 1985.
31. Денисова И.П. Об уравнении связи в релятивистской теории гравитации. //Теоретическая и математическая физика, 1995, т. 105, № 3, с. 508
32. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1975.
33. Крамер Д., Штефани Ч., Мак-Каллум М. Точные решения уравнений Эйнштейна. - М.: Энергоиздат, 1982.
34. Захаров В.Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна.- М.: Наука, 1972.
35. Taylor J.H. Pulsar timing and relativistic gravity. //Class. and Quantum Grav., 1993, v. 10, p. 167.
36. Denisova I.P., Dalal M. Development of the method of potentials for the problems of gravitation-electromagnetic conversion. //Journal of Mathematical Physics, 1997, v. 38, № 11, p. 5820.
37. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. - М.: Советское радио, 1970.

Учебное пособие

Ирина Павловна Денисова

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Компьютерный набор автора

Издательство
УНЦ ДО

ИД № 00545 от 06.12.1999

117246, Москва, ул. Обручева, 55А
Тел./факс (095) 718-6966, 718-7785, 718-7786
e-mail: izdat@abiturcenter.ru
http://abiturcenter.ru/izdat

Гигиенический сертификат № 77.99.02.953.Д.001743.03.03 от 11.03.2003
Налоговые льготы - Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 1 - 953000

Подписано в печать 26.03.2004 г. Формат 60x90/16
Бумага офсетная №2. Усл.печ.л. 14,4
Тираж 500 экз. Заказ №599

Отпечатано в Мини-типографии УНЦ ДО
http://abiturcenter.ru/print
в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета

ISBN 5-88800-255-0
9 785888 002551